А.Г.Мерзляк
В.Б.Полонський
Е.М.Рабінович
М.С.Якір

Збірник

задач і завдань для тематичного оцінювання

9 клас

ГЕОМЕТРІЯ

ГІМНАЗІЯ

А.Г. Мерзляк,
В.Б. Полонський,
Ю.М. Рабінович,
М.С. Якір

ЗБІРНИК

задач і завдань для тематичного оцінювання з геометрії для 9 класу

Рекомендовано Міністерством науки і освіти України

Харків
«Гімназія»
2005

ББК 22.1я72
М3-41

Рекомендовано
Міністерством науки і освіти України
(лист № 3/2-89 від 22.02.99)

Рецензент: *Мітельман І.М.* — кандидат фізико-математичних наук, вчитель-методист Рішельєвського ліцею при Одеському державному університеті;

Посібник є дидактичним матеріалом з геометрії для 9 класу загальноосвітніх шкіл. Він містить більше 1200 задач. Першу частину «Тренувальні вправи» поділено на три однотипних варіанти по 420 задач у кожному. Друга частина містить завдання для тематичного оцінювання навчальних досягнень учнів (два варіанти) за дванадцятибальною шкалою у відповідності з державною програмою з математики, прийнятою у 2001 році.

Для вчителів середніх шкіл та учнів 9 класів.

Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Рабінович Ю.М., Якір М.С.
М3-41 Збірник задач і завдань для тематичного оцінювання з геометрії для 9 класу. — Харків, Гімназія, **2003**. — 136 с.: іл.

ISBN 966–7384–05–5 **ББК 22.1я72**

© А.Г. Мерзляк,
В.Б. Полонський,
Ю.М. Рабінович,
М.С. Якір, 2001

ISBN 966–7384–05–5 © Гімназія, 2001

ЗМІСТ

Від авторів 3
Тематичний розподіл тренувальних вправ . . 4
Тренувальні вправи 5
Варіант 1 5
Варіант 2 44
Варіант 3 83
Завдання для тематичного оцінювання знань . 122
Варіант 1 122
Варіант 2 125
Відповіді та вказівки до тренувальних вправ . 128

драт $M_1N_1P_1K_1$ — шуканий. **213.** *Вказівка.* Розмістити квадрати так, щоб їх центри співпадали (мал. 128). Здійснити поворот квадрата $A_1B_1C_1D_1$ відносно точки O на такий кут, щоб точка C_1 перейшла в C_2, де C_2 належить стороні CD. **214.** $12a^2$. *Вказівка.* Нехай $ABCDEF$ — даний шестикутник, X — точка на колі. Тоді $XA^2 + XD^2 = XB^2 + XE^2 = XC^2 + XF^2 = 4a^2$. **220.** 20π см. **222.** 14 км/год. **228.** 4 см. **229.** $(\pi + 1)$ m. **230.** $2\pi\sqrt{2}$ см. **231.** $\pi\sqrt{3}$ см. **232.** *Вказівка.* Порівняти довжину кола та периметри многокутників. **247.** 8 см. **254.** *Вказівка.* Побудувати прямокутний трикутник, гіпотенуза якого дорівнює стороні більшого квадрата, а один з катетів — стороні меншого. **256.** *Вказівка.* Побудувати відрізок $m = \sqrt{2ab}$. **268.** 64 см^2. **269.** $\sqrt{2}$. **271.** 360 см^2. **282.** $9\frac{3}{13}$ см. **288.** 312 см^2. **289.** 1200 см^2. **290.** $12\sqrt{2}$ см, $12\sqrt{2}$ см, $12\sqrt{6}$ см. **292.** 240 см^2. **293.** 156 см^2. **295.** 240 см^2. **296.** $16\sqrt{3}\,(2 + \sqrt{3})$ см^2. **297.** 37 см^2. **299.** 4 см^2. **301.** 4:7. **304.** 4 см^2. **306.** *Вказівка.* Шукана пряма BE ділить сторону AD паралелограма $ABCD$ у відношенні 3:1, рахуючи від точки A. **307.** *Вказівка.* Висота шуканого рівнобедреного трикутника, проведена до основи, дорівнює висоті даного трикутника, проведеній до вибраної сторони. **309.** 600 см^2. **310.** 600 см^2. **312.** $4\sqrt[4]{3}$ см і $4\sqrt[4]{27}$ см. **313.** $(4 - 2\sqrt{3})$ см^2. **315.** $10\sqrt{110}$ см^2. **318.** 30 см, 82 см, 56 см. **321.** 7 см і 16 см. **326.** 192 см^2. **330.** 114 см^2. **331.** $48\sqrt{3}$ см^2. **334.** 4 см і 12 см. **335.** 306 см^2. **336.** 320 см^2. **339.** 162 см^2. **340.** $16\sqrt{3}$ см^2. *Вказівка.* Діагональ трапеції утворює з більшою основою кут 30°. **344.** $72\sqrt{2}$ см^2. **346.** $4\,(3 + 2\sqrt{2})$ см^2. **347.** $18\sqrt{3}$ см^2. **348.** 18 см^2. *Вказівка.* $S_{AOB} \cdot S_{COD} = S_{AOD} \cdot S_{BOC}$. **349.** $3\sqrt{231}$ см^2. *Вказівка.* Дивитись вказівку до номеру 349 варіанта 1. **354.** 135 см^2 або $26\frac{2}{3}$ см^2. **355.** $14\sqrt{2}$ см. **356.** 16:65:144. **357.** 3 см. **358.** 8 см^2. **359.** *Вказівка.* Довжина шуканого відрізка дорівнює $\frac{1}{4}$ довжини даної медіани. **360.** 70,56 см^2. **377.** $264\frac{1}{16}\pi$ см^2, 64π см^2. **378.** $32\sqrt{3}$ см^2. **379.** 3:2. **381.** $54\frac{270}{289}\pi$ см^2. *Вказівка.* Побудувати трикутник, симетричний даному відносно середньої сторони. Знайти радіус кола, вписаного в отриманий чотирикутник. **382.** $32\,(\pi - \sqrt{3})$ см^2. **384.** $\frac{9}{16}\pi$ см^2.

ВІД АВТОРІВ

Учням

Любі діти! У цьому році ви продовжите захоплюючу подорож по чудовій країні Геометрія. Ми впевнені, що подолання перешкод, які стануть на вашому шляху, не тільки допоможе вам зміцніти, але й принесе радість від одержаних перемог.

Учителю

Ми дуже сподіваємось, що, придбавши цю книжку не тільки для себе, а й «на клас», Ви не пошкодуєте. Навіть тоді, коли Вам пощастило, і Ви працюєте за підручником, який подобається, все одно задач, як і грошей, буває або мало, або зовсім мало. Ми маємо надію, що цей посібник допоможе ліквідувати «задачний дефіцит».

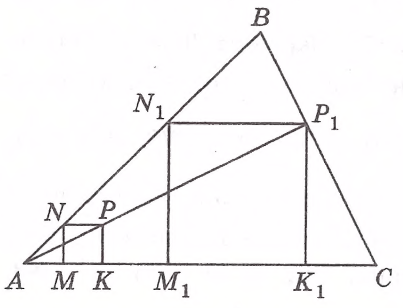
Першу частину — «Тренувальні вправи» — поділено на три однотипні варіанти по 420 задач у кожному. До більшості задач першого і другого варіантів наведено відповіді та вказівки до розв'язку. Відсутність відповідей до вправ третього варіанта, на нашу думку, розширює можливості вчителя при складанні самостійних і перевірочних робіт. На стор. 4 наведено таблицю тематичного розподілу тренувальних вправ. Друга частина посібника містить завдання для тематичного оцінювання знань учнів (два варіанти).

Зміст завдань поділимо умовно на дві частини. Перша відповідає початковому і середньому рівням навчальних досягнень. Завдання цієї частини позначені символом **n°** (**n** — номер завдання). Друга частина відповідає достатньому і високому рівням. Завдання кожного з цих рівнів позначені символами **$n^\bullet$** і **$n^{\bullet\bullet}$** відповідно. Виконання першої частини оцінюється максимально у шість балів. Правильно розв'язані задачі рівня **$n^\bullet$** додають ще 4 бали, тобто учень має можливість отримати відмінну оцінку 10 балів. Якщо учневі вдалося ще розв'язати задачу **$n^{\bullet\bullet}$**, то він отримує оцінку 12 балів.

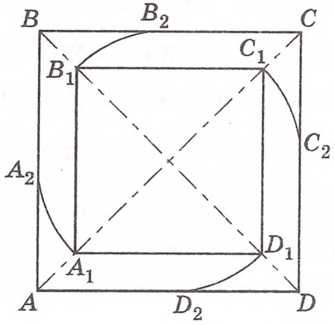
Тематичний розподіл тренувальних вправ

Тема	Номери вправ
Подібність фігур. Гомотетія	1–7
Властивості подібних трикутників	8–12
Ознаки подібності трикутників	13–41
Пропорційні відрізки в прямокутному трикутнику	42–50
Кути, вписані в коло	51–73
Кут, утворений дотичною і хордою	74–79
Чотирикутник, вписаний в коло	80–86
Теорема косинусів	87–100
Сума квадратів діагоналей паралелограма	101–107
Теорема синусів	108–120
Співвідношення між кутами трикутника та протилежними сторонами	121–130
Властивість бісектриси трикутника	131–146
Формула $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$	147–155
Розв'язування трикутників	156–160
Ламана. Опуклий многокутник	161–166
Сума внутрішніх та зовнішніх кутів многокутника	167–177
Правильний многокутник	178–195
Залежність між сторонами та радіусами вписаного та описаного кіл правильного многокутника	196–214
Довжина кола та його частин	215–232
Радіанна міра кута	233–236
Площа квадрата. Площа прямокутника	237–258
Площа паралелограма. Площа ромба	259–273
Площа трикутника	274–318
Площа трапеції	319–340
Площа многокутника	341–349
Площі подібних фігур	350–360
Площа круга та його частин	361–385
Взаємне розміщення прямих і площин у просторі	386–396
Призма	397–403
Піраміда	404–410
Циліндр	411–413
Конус	414–417
Куля	418–420

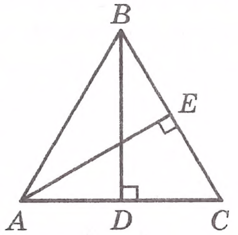
$AC = \frac{2m \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$, $BC = \frac{2m}{\sin(\alpha + \beta)} \times \sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha \sin\beta \cos(\alpha + \beta)}$. *Вказівка.* На продовженні медіани AM за точку M відкласти відрізок MD, рівний AM. Розглянути ΔABD. **123.** Ні. **126.** *Вказівка.* Дивитись вказівку до номеру 120 варіанта 1. **129.** 45°. **130.** 60° або 120°. **134.** 36 см, 45 см. **135.** 34 см, 30 см, 16 см. **136.** 6,5 см, 7,5 см. **137.** 21 см, 28 см. **139.** 45 см, 45 см, 27 см, 81 см. **141.** $5\frac{8}{11}$ см, $15\frac{3}{11}$ см. **143.** 30 см, 30 см, 48 см. **144.** 16 см. **145.** 90 см. **149.** $2\sqrt{7}$ см або $2\sqrt{31}$ см. **150.** 8 см. **151.** $\frac{R\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}$. *Вказівка.* $\angle AMB = 90° + \frac{\alpha}{2}$. **153.** $\frac{15\sqrt{41}}{8}$ см, 6 см. *Вказівка.* Дивитись вказівку до номеру 153 варіанта 1. **155.** *Вказівка.* Застосувати теорему синусів до трикутників ADC і BDC, довести, що відношення радіусів описаних кіл дорівнює відношенню сторін AC і BC. **163.** 6; 27. **165.** *Вказівка.* Нехай A, B, C і D — середини сторін MK, MN, NP і PK чотирикутника $MNPK$ відповідно. Тоді $ABCD$ — паралелограм, $MP + NK = 2(AB + BC) < 2(AC + BD)$. **168.** Ні. **172.** *Вказівка.* Розглянути суму зовнішніх кутів многокутника. **173.** Ні. **174.** 15, 90. **182.** 30. **188.** 60°. **190.** *Вказівка.* Побудувати рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює даній стороні дванадцятикутника, а кут при вершині трикутника дорівнює 30°. **203.** 2. **207.** $a\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **208.** $R\sqrt{2}$, $R\sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $2R$. **209.** $2\sqrt{3}$ см. **210.** 1:2:2:1. **211.** $\frac{a}{3}$. **212.** *Вказівка.* Вибрати на стороні AB трикутника ABC довільну точку N і побудувати квадрат $NPKM$ (мал. 127). P_1 — точка перетину променя AP і сторони BC. Ква-



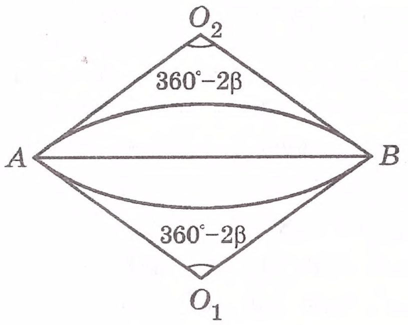
Мал. 127



Мал. 128



Мал. 125



Мал. 126

46. 9,6 см. **47.** 3 см, $\sqrt{10}$ см. **50.** 4 см, 16 см, 4 см. **60.** 252° і 108°. **63.** 58°. *Вказівка.* $\angle PAE = \angle PKE = 16°$. **64.** 86°; 8°; 86°. **65.** *Вказівка.* $\angle ABF = \angle ACF$. **66.** *Вказівка.* Кути CED і CFD — сталі. **67.** 58°, 58°, 64°, або 61°, 61°, 58°, або 29°, 29°, 122°. *Вказівка.* Дивитись вказівку до номеру 67 варіанта 1. **68.** *Вказівка.* Шукане геометричне місце точок — коло, побудоване на відрізку, який з'єднує дану точку з центром даного кола, як на діаметрі. **69.** *Вказівка.* Шукане геометричне місце точок — дві дуги кіл з центрами O_1 і O_2 такі, що $\angle AO_1B = \angle AO_2B = 360°-2\beta$ (мал. 126). **70.** *Вказівка.* Дивитись вказівку до номеру 70 варіанта 1. **72.** 3 см. **73.** 3 см і 12 см. **75.** 39°; 64°; 77°. **76.** 34°. *Вказівка.* Знайти $\angle BAC$. **78.** 5 см. **79.** 14 см. **82.** 1) так; 2) ні. **83.** 144°, 86°, 36°, 94°. **84.** 63°. **85.** 8 см і 10 см. *Вказівка.* $\angle CKP = \angle ABP = \angle CME$. **86.** Всередині трапеції. **89.** $\sqrt{129}$ см або $\sqrt{97}$ см. **91.** $\sqrt{22}$ см. *Вказівка.* З ΔABC знайти косинус кута A. **93.** 60 см. **94.** 15 см і 40 см. **95.** 15 см. **97.** $\dfrac{c}{4\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{5-4\cos\alpha}$. **98.** $\sqrt{\dfrac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}}$.

100. $2\sqrt{97}$ см. *Вказівка.* Дивитись вказівку до номеру 100 варіанта 1. **101.** 16 см, 38 см. **102.** 10 см, 20 см. **103.** $\sqrt{113}$ см. *Вказівка.* Дивитись вказівку до номеру 103 варіанта 1. **105.** 10 см. **106.** $3\sqrt{559}$. *Вказівка.* Розглянути трикутник MAB, де M — точка перетину медіан трикутника, $AB = 42$ см. Медіана MD трикутника MAB дорівнює третині шуканої медіани. **110.** Ні. **112.** $\dfrac{m\sin\beta\sin\gamma}{b}$. **113.** $\dfrac{l\sin\frac{3}{2}\alpha}{\sin\alpha}$, $\dfrac{l\sin\frac{3}{2}\alpha}{\sin 2\alpha}$. **116.** $a-\dfrac{a\sin\frac{\alpha}{5}}{\sin\frac{4}{5}\alpha}$, $\dfrac{a\sin\alpha}{\sin\frac{4}{5}\alpha}$. **118.** $8(1+\sqrt{2})$ см, $8(2+\sqrt{2})$ см. **120.** $AB = \dfrac{2m\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$,

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

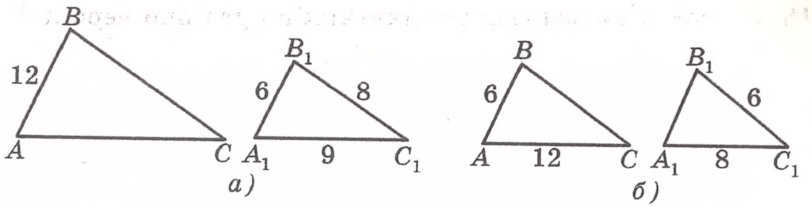
Варіант 1

Подібність фігур. Гомотетія

1. Накреслити в зошиті відрізок $AB = 2$ см і позначити точку O, що не належить цьому відрізку. Побудувати відрізок, гомотетичний відрізку AB з центром гомотетії в точці O і коефіцієнтом $k = 3$.
2. Накреслити в зошиті гострий кут і позначити точку A, яка лежить всередині кута. Побудувати кут, гомотетичний даному куту з центром гомотетії в точці A і коефіцієнтом $k = \frac{1}{2}$.
3. Побудувати трикутник, гомотетичний даному тупокутному трикутнику з центром гомотетії в точці перетину його медіан і коефіцієнтом гомотетії $k = 2$.
4. Позначити в зошиті дві точки A і B. Знайти таку точку O, щоб точка A переходила в точку B при гомотетії з центром O і коефіцієнтом $k = 2$.
5. Гомотетія з центром у початку координат переводить точку $A\ (-2;\ 8)$ в точку $B\ (-1;\ 4)$. Знайти коефіцієнт гомотетії.
6. Дано дві паралельні прямі. Чи можна одну з них перетворити в іншу за допомогою гомотетії? Як це зробити?
7. Чи можуть два трикутники бути гомотетичними, але не подібними?

Властивості подібних трикутників

8. Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні (мал. 1). Знайти невідомі сторони цих трикутників.



Мал. 1

9. Сторони трикутника відносяться як 7:6:3. Знайти сторони подібного йому трикутника, якщо в нього:
   1) периметр дорівнює 8 см;
   2) менша сторона дорівнює 6 см;
   3) більша сторона дорівнює 28 см;
   4) різниця більшої і меншої сторін дорівнює 20 см.

10. Сторони многокутника відносяться як 4 : 5 : 7 : 8 : 9. Знайти сторони подібного йому многокутника, якщо його периметр дорівнює 99 см.

11. Сторони трикутника відносяться як 4:6:7, а середня за довжиною сторона подібного йому трикутника дорівнює 18 см. Знайти інші сторони другого трикутника.

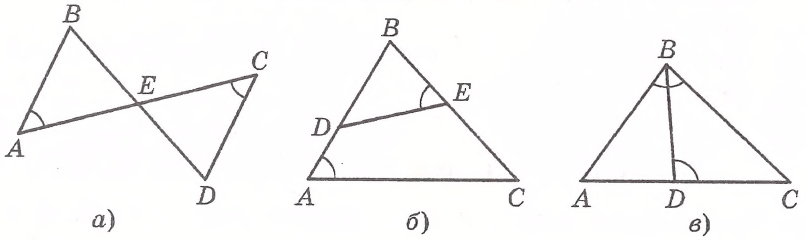
12. Периметри подібних трикутників відносяться як 7:5, а сума менших сторін трикутників дорівнює 36 см. Знайти сторони обох трикутників, якщо сторони одного з них відносяться як 3:7:8.

Ознаки подібності трикутників

13. Вказати пари подібних трикутників і довести їх подібність (мал. 2).

14. Довести, що рівнобедрені трикутники подібні, якщо рівні їх кути при вершині.

15. У двох рівнобедрених трикутників кути при вершині рівні. Периметр першого трикутника дорівнює 270 см. Знайти його сторони, якщо сторони другого трикутника відносяться як: 1) 1:4; 2) 4:7.

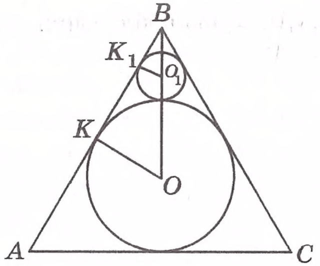


Мал. 2

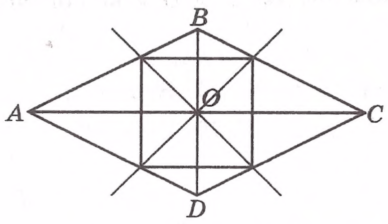
паралелограма $ABCD$ у відношенні 1:4, рахуючи від точки D. **307.** *Вказівка.* Висота, проведена до бічної сторони шуканого трикутника, дорівнює висоті, проведеній до рівної їй сторони даного трикутника. Побудувати рівнобедрений трикутник за бічною стороною і висотою, проведеною до неї. **309.** 216 см^2. **310.** 5070 см^2. **312.** $2\sqrt[4]{3}$ см і $2\sqrt[4]{27}$ см. **313.** $(2\sqrt{3}-3)$ см^2. **315.** $22\sqrt{14}$ см^2. **318.** 52 см^2, 30 см^2, 74 см^2. **321.** 2 см і 10 см. **326.** 256 см^2. **330.** 312 см^2. **331.** $75\sqrt{3}$ см^2. **334.** 12 см, 16 см. **335.** 264 см^2. **336.** 180 см^2. **339.** 198 см^2. **340.** $3\sqrt{3}$ см^2. *Вказівка.* Центр описаного кола лежить на більшій основі трапеції. **344.** 48 см^2. **346.** $2(\sqrt{2}-1)$ см^2. **347.** $2\sqrt{3}$ см^2. **348.** 12 см^2. *Вказівка.* $S_{ABM} \cdot S_{CMD} = S_{BMC} \cdot S_{AMD}$. **349.** $20\sqrt{3}$ см^2. *Вказівка.* Знайти, користуючись теоремою косинусів, кут між сторонами чотирикутника. **354.** 63 см^2, 448 см^2. **355.** $3\sqrt{2}$ см. **356.** 9:40:95. **357.** $2\sqrt{3}$. **358.** 24 см^2. **359.** *Вказівка.* Довжина відрізка шуканої прямої, що лежить між сторонами трикутника, дорівнює $\frac{1}{3}$ довжини даної медіани. **360.** 48 см^2. **377.** $\frac{100}{9}\pi$ см^2. **378.** 48 см^2. **379.** 3:1. **381.** $\frac{1568\pi}{81}$ см^2. *Вказівка.* Побудувати трикутник, симетричний даному відносно більшої сторони. Знайти радіус кола, вписаного в отриманий чотирикутник. **382.** $\frac{3}{2}(3\sqrt{3}-\pi)$ см^2. **384.** $13{,}5\pi$ см^2.

Варіант 2

9. 1) 20 см, 44 см, 56 см; 2) 25 см, 55 см, 70 см; 3) 15 см, 33 см, 42 см; 4) 10 см, 22 см, 28 см. **12.** 32 см, 64 см, 56 см і 24 см, 48 см, 42 см. **15.** 2) 30 см, 40 см, 40 см або 33 см, 33 см, 44 см. **16.** 15 см, 15 см, 24 см. **31.** 14 см, 18 см. **36.** 12 см. **37.** 15 см. **38.** 12 см. **39.** 15 см. **40.** 37,5 см; 37,5 см; 45 см. *Вказівка.* $\Delta AEC \backsim \Delta BDC$. $\frac{AE}{BD}=\frac{AC}{BC}=\frac{36}{30}=\frac{6}{5}$. Тоді $DC = 3x$ см, $BC = 5x$ см, $BD = 4x$ см = 30 см (мал. 125). **41.** $4\frac{1}{2}$ см; $9\frac{3}{8}$ см. *Вказівка.* Дивитись вказівку до задачі 41 варіанта 1.



Мал. 123



Мал. 124

155. *Вказівка.* Довести рівність синусів кутів ABC і AOC. **165.** *Вказівка.* Продовжити третю медіану трикутника на $\frac{1}{3}$ її довжини і з'єднати отриману точку з однією з вершин трикутника. **168.** Ні. **172.** Три. **173.** Ні. **174.** 11; 44. **182.** 5. **188.** 120°. **200.** Ні. *Вказівка.* Відношення радіуса вписаного кола до радіуса описаного дорівнює косинусу половини центрального кута. Знайти косинус половини центрального кута для правильного трикутника і чотирикутника. Врахувати, що косинус спадає при збільшенні кута від 0° до 90°. **203.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **207.** $(2 + \sqrt{3})$ см. **208.** $6\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ см, $6(\sqrt{2} + 1)$ см, $6\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$ см. **209.** $(3 + \sqrt{3})$ см. **210.** $\frac{a\sqrt{3}}{18}$. *Вказівка.* $\frac{O_1K_1}{OK} = \frac{BO_1}{BO} = \frac{1}{3}$ (мал. 123). **211.** $(4 + 2\sqrt{2})$ см. **212.** *Вказівка.* Вершини квадрата лежать на перетині сторін ромба з бісектрисами кутів AOB, BOC, COD і DOA (мал. 124). **213.** 12 см. **214.** $4a^2$. *Вказівка.* Нехай $ABCD$ — даний квадрат, X — довільна точка на колі, описаному навколо нього. Тоді $XA^2 + XC^2 = XB^2 + XD^2 = AC^2$. **220.** Рівні. **222.** 37,7 км/год. **228.** 24 см. **229.** πa. **230.** $\frac{9\pi}{5}$ см. **231.** $\pi\sqrt{3}$ см. **232.** *Вказівка.* Порівняти периметри многокутників та довжину кола. **247.** 4 см. **254.** *Вказівка.* Побудувати прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють сторонам даних квадратів. **256.** *Вказівка.* Побудувати відрізок $m = \sqrt{ab}$. **258.** 6 см^2. **269.** 45°, 45°, 135°, 135°. **271.** $\frac{160\sqrt{3}}{3}$ см^2. **282.** 7,2 см. **287.** *Вказівка.* $S_{AOB} = S_{ABD} - S_{AOD}$, $S_{COD} = S_{ACD} - S_{AOD}$. **288.** 78 см^2. **289.** 108 см^2. **290.** $10\sqrt{6}$ см, $10\sqrt{6}$ см, $10\sqrt{12-6\sqrt{3}}$ см. **292.** 120 см^2. **293.** 180 см^2. **295.** 120 см^2. **296.** $(6\sqrt{3} + 9)$ см^2. **297.** 80 см^2. **299.** 5,76 см^2. **301.** 7:4. **304.** 144 см^2. **306.** *Вказівка.* Шукана пряма BE ділить сторону AD

16. У двох рівнобедрених трикутників кути при вершині рівні. Основа першого трикутника дорівнює 8 см, а висота, проведена до неї, — 3 см. Знайти сторони другого трикутника, якщо його периметр дорівнює 54 см.

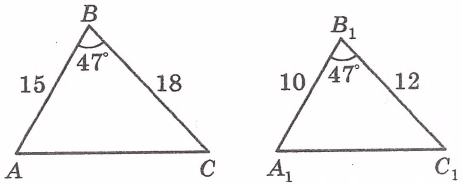
17. Два прямокутні трикутники мають по рівному гострому куту. Катети першого трикутника відносяться як 5:12. Знайти гіпотенузу другого трикутника, якщо його периметр дорівнює 120 см.

18. Кути одного трикутника відносяться як 3:5:7, а один з кутів другого трикутника на 24° більший за другий і на 24° менший за третій кут. Чи подібні ці трикутники?

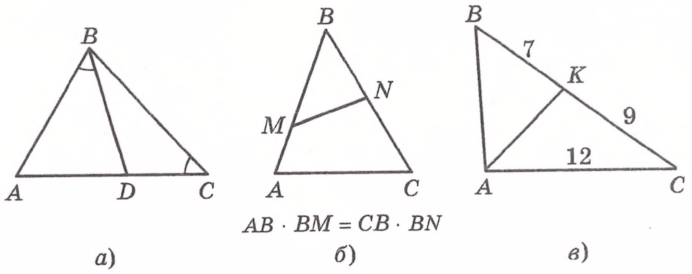
19. Довести подібність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ (мал. 3).

20. Знайти пари подібних трикутників і довести їх подібність (мал. 4).

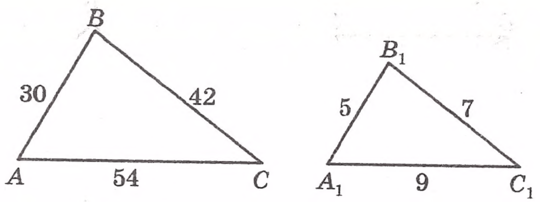
21. У трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, а сторони трикутника ABC, що утворюють кут A, у 3,5 рази більші від сторін, що утворюють кут A_1. Знайти сторони BC і B_1C_1, якщо їх сума дорівнює 18 см.



Мал. 3



Мал. 4



Мал. 5

22. У трикутнику ABC $AB = 16$ см, $AC = 20$ см. На стороні AB відклали відрізок $AD = 12$ см, а на стороні AC — відрізок $AE = 15$ см. Чи подібні трикутники ABC і ADE?

23. Довести подібність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ (мал. 5).

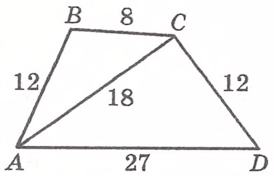
24. Вказати пару подібних трикутників і довести їх подібність (мал. 6).

25. Визначити, чи подібні трикутники, якщо сторони їх дорівнюють:
1) 5 см, 8 см, 9 см і 15 см, 24 см, 27 см;
2) 2 см, 5 см, 6 см і 8 см, 18 см, 20 см.
Якщо відповідь позитивна, вказати коефіцієнт подібності.

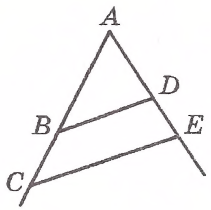
26. Сторони одного трикутника відносяться як 5:7:9, а сторони другого трикутника дорівнюють 25 см, 35 см і 45 см. Чи подібні ці трикутники?

27. Катети одного прямокутного трикутника дорівнюють 6 см і 8 см, а гіпотенуза і висота, проведена до неї, другого трикутника відповідно дорівнюють 50 см і 24 см. Чи подібні ці трикутники?

28. На мал. 7 $BD \parallel CE$. Записати пропорції, які починаються з відношень: 1) $\frac{AC}{CE}$; 2) $\frac{BD}{CE}$; 3) $\frac{AE}{AD}$; 4) $\frac{AB}{BC}$.



Мал. 6



Мал. 7

Вказівка. На основі трикутника, як на хорді, побудувати геометричне місце точок, з яких її видно під заданим кутом. **72.** 6 см. **73.** 3 см і 6 см. **75.** 54°, 63°, 63°. **76.** 74°, 23°, 83°. *Вказівка.* $\angle DAC = \angle ABC$. **77.** *Вказівка.* $\angle CBD = \angle CAB$. **78.** 2 см. *Вказівка.* $AK^2 = AE \cdot AF$. **79.** 4 см. **82.** 1) ні; 2) так. **83.** 40°, 120°, 140°, 60°. **84.** 61°. **85.** 1,5 см; 1,25 см. *Вказівка.* Чотирикутник $ADEB$ вписаний у коло, звідки $\angle CED = 180° - - \angle DEB = \angle DAB$. **86.** Поза трапецією. **89.** 9 см або $3\sqrt{17}$ см. **91.** 3 см. *Вказівка.* З ΔABC знайти косинус кута A. **93.** 18 см. **94.** 3 см, 5 см. **95.** 3 см або 5 см. **97.** $\frac{a}{4\cos\alpha}\sqrt{8\cos^2\alpha + 1}$. **98.** $\frac{b^2 + c^2 - a^2 - d^2}{2(ad + bc)}$. **100.** $2\sqrt{19}$ см. *Вказівка.* На продовженні медіани AM трикутника ABC за точку M відкласти відрізок MD, рівний AM, і розглянути ΔABD. **101.** 24 см, 28 см. **102.** 10 см, 15 см. **103.** 5,5 см. *Вказівка.* Продовжити медіану трикутника на її довжину і отриману точку з'єднати з двома іншими вершинами трикутника. Розглянути отриманий паралелограм. **105.** $2\sqrt{10}$ см. **106.** $3\sqrt{61}$ см. *Вказівка.* $AM : MM_1 = BM : MM_2 = 2 : 1$.

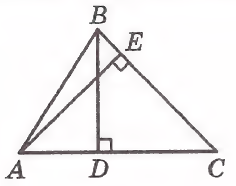
Розглянути ΔAMB і знайти його медіану MM_3. **110.** Ні. **111.** $\frac{a\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}$, $\frac{a\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$. **112.** $\frac{c\sin(\beta+\gamma)}{\cos\alpha\sin\gamma}$. **113.** $\frac{c\sin\alpha\cos\alpha}{\sin(45°+\alpha)}$. **116.** $\frac{l\cos\frac{\beta-\alpha}{2}}{\sin\alpha}$, $\frac{l\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\beta}$, $\frac{l\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\alpha\sin\beta}(\sin\alpha + \sin\beta)$. **118.** $4(2+\sqrt{6})$ см, $4(3+\sqrt{6})$ см.

120. $\frac{P\sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha+\beta)}$, $\frac{P\sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha+\beta)}$, $\frac{P\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha+\beta)}$. **123.** Ні. **126.** *Вказівка.* Продовжити медіану BM за точку M на її довжину (точка D). Розглянути трикутник ABD. **129.** 30°. **130.** 60° або 120°. **132.** $\angle ACD < \angle BCD$. **134.** 21см, 28 см. **135.** 18 см, 24 см, 30 см. **136.** $8\frac{1}{3}$ см, $8\frac{2}{3}$ см. **137.** 15 см. **139.** 45 см, 45 см, 45 см, 117 см. **141.** 10,5 см; 17,5 см. **143.** 15 см, 15 см, 24 см. **144.** 10 см. **145.** 27 см, 27 см, 18 см. **149.** $\sqrt{10}$ см або $\sqrt{58}$ см. **150.** $3\sqrt{3}$ см. **153.** $\frac{6\sqrt{105}}{5}$. *Вказівка.* Радіус кола, описаного навколо трапеції $ABCD$, дорівнює радіусу кола, описаного навколо трикутника ABD.

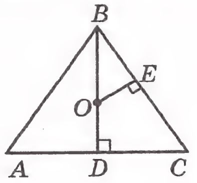
ВІДПОВІДІ І ВКАЗІВКИ ДО ТРЕНУВАЛЬНИХ ВПРАВ

Варіант 1

5. $k = 0{,}5$. **9.** 1) 3,5 см, 3 см, 1,5 см; 2) 14 см, 12 см, 6 см; 3) 28 см, 24 см, 12 см; 4) 35 см, 30 см, 15 см. **12.** 15 см, 35 см, 40 см і 21 см, 49 см, 56 см. **15.** 2) 72 см, 72 см, 126 см або 60 см, 105 см, 105 см. **16.** 15 см, 15 см, 24 см. **31.** 15 см, 20 см. **36.** 1,5 см і 4,5 см. **37.** 20 см. **38.** 2 см. **39.** 2,5 см і 4,5 см. **40.** 12,5 см, 12,5 см, 15 см. *Вказівка.* (мал. 120) $\Delta AEC \backsim \Delta BDC$, $\frac{BC}{AC} = \frac{BD}{AE} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$, $BC = 5x$, $DC = 3x$, тоді $BD = 4x$, $4x = 10$, $x = 2{,}5$. **41.** 3 см, 6,25 см. *Вказівка.* 1) Нехай O — центр вписаного кола, $OD = OE = r$, $\Delta BOE \backsim \Delta BCD$ (мал. 121). $\frac{BO}{BC} = \frac{OE}{DC}$; 2) Провести перпендикуляр з центра кола до бічної сторони.

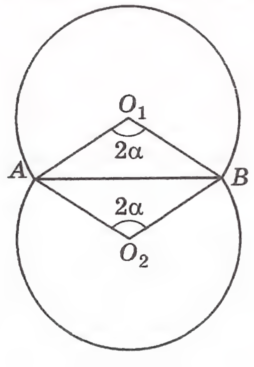


Мал. 120

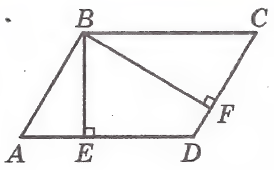


Мал. 121

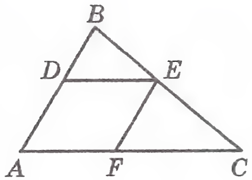
Знайти пари подібних трикутників. **46.** 7,2 см. **47.** 6 см, $2\sqrt{13}$ см. **48.** 16 см, 36 см, 12 см. **60.** 60°. **63.** 37°. *Вказівка.* $\angle DCK = \angle DMK = 53°$. **64.** 24°, 78°, 78°. **66.** *Вказівка.* $\angle ABD = \angle ABC = 90°$. **67.** 64°, 58°, 58°, або 52°, 64°, 64°, або 116°, 32°, 32°. *Вказівка.* Для гострокутного трикутника розглянути випадки, коли AB — бічна сторона трикутника, і коли AB — основа трикутника. Розглянути також випадок тупокутного трикутника. **68.** *Вказівка.* Шукане геометричне місце точок — коло, побудоване на відрізку, який з'єднує дану точку з центром даного кола, як на діаметрі, виключаючи саму дану точку. **69.** *Вказівка.* Шукане геометричне місце точок — дві дуги кіл з центрами O_1 і O_2 такі, що $\angle AO_1B = \angle AO_2B = 2\alpha$ (мал. 122). **70.**



Мал. 122



Мал. 8



Мал. 9

29. У паралелограмі $ABCD$ проведено висоти BE і BF (мал. 8). Довести подібність трикутників ABE і CBF.

30. Сторони паралелограма дорівнюють 15 см і 30 см, а відстань між меншими сторонами дорівнює 20 см. Знайти відстань між більшими сторонами паралелограма.

31. Периметр паралелограма дорівнює 70 см, а його висоти — 3 см і 4 см. Знайти сторони паралелограма.

32. Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці E. Більша основа AD трапеції дорівнює 12 см, $AE = 15$ см, $BE = 5$ см. Знайти меншу основу трапеції.

33. Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці F. Знайти AB, якщо $AF = 10$ см і $BC : AD = 2 : 5$.

34. Одна з діагоналей трапеції дорівнює 28 см і ділить другу діагональ на відрізки довжиною 5 см і 9 см. Знайти відрізки, на які ділить точка перетину діагоналей першу діагональ, і більшу основу трапеції, якщо менша основа трапеції дорівнює 6 см.

35. У трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) O — точка перетину діагоналей. $AO : OC = 5 : 2$, а середня лінія трапеції дорівнює 7 см. Знайти основи трапеції.

36. У трикутнику ABC проведено промінь BD такий, що $\angle ABD = \angle BCA$. Знайти відрізки, на які промінь BD ділить сторону AC, якщо $AB = 3$ см, $AC = 6$ см.

37. У трикутник ABC вписано паралелограм $ADEF$ (мал. 9). Знайти AC, якщо $AB = 16$ см, $AD = 12$ см, $DE = 5$ см.

38. У трикутник ABC вписано ромб $AKPE$ так, що кут A в них спільний, а вершина P належить стороні BC. Знайти сторону ромба, якщо $AB = 6$ см, $AC = 3$ см.

39. У трикутник з основою 12 см і висотою 4 см вписано прямокутник, сторони якого відносяться як 5:9, причому більша сторона належить основі трикутника. Знайти сторони прямокутника.
40. Висота рівнобедреного трикутника, опущена на основу, дорівнює 10 см, а висота, опущена на бічну сторону, — 12 см. Знайти сторони трикутника.
41. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 12 см, а бічна сторона — 10 см. Обчислити:
   1) радіус кола, вписаного в трикутник;
   2) радіус кола, описаного навколо трикутника.

Пропорційні відрізки в прямокутному трикутнику

42. Знайти висоту прямокутного трикутника, проведену з вершини прямого кута, якщо вона ділить гіпотенузу на відрізки довжиною 4 см і 16 см.
43. Катет прямокутного трикутника дорівнює 8 см, а його проекція на гіпотенузу — 4 см. Знайти гіпотенузу.
44. Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, ділить її на відрізки довжиною 18 см і 32 см. Знайти катети трикутника.
45. Один катет прямокутного трикутника дорівнює 4 см, а проекція другого катета на гіпотенузу — 6 см. Знайти другий катет та гіпотенузу.
46. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 9 см і 12 см. Знайти висоту трикутника, проведену з вершини прямого кута.
47. Знайти висоту та бічну сторону рівнобічної трапеції, основи якої 5 см і 13 см, а діагоналі перпендикулярні до бічних сторін.
48. Діагональ рівнобічної трапеції перпендикулярна до бічної сторони і дорівнює $3\sqrt{5}$ см, а проекція бічної сторони на більшу основу дорівнює 4 см. Знайти основи трапеції та її бічну сторону.
49. Перпендикуляр, проведений з точки перетину діагоналей ромба до його сторони, ділить її на відрізки довжиною 3 см і 12 см. Знайти діагоналі ромба.
50. Коло, вписане в рівнобічну трапецію, ділить точкою дотику бічну сторону на відрізки довжиною 8 см і 18 см. Знайти основи трапеції і радіус кола.

4•. Площі двох подібних многокутників відносяться як 4:9, а різниця їх периметрів дорівнює 47 см. Знайти периметри многокутників.

5••. Бісектриса гострого кута прямокутного трикутника ділить катет на відрізки довжиною 6 см і 10 см. Знайти площу трикутника.

Тематичне оцінювання № 5

Тема: *Узагальнення і систематизація знань учнів*

1°. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 13 см, а висота, проведена до основи — 12 см. Знайти:
   1) довжину середньої лінії трикутника, паралельну бічній стороні;
   2) основу трикутника;
   3) косинус кута при основі трикутника;
   4) площу трикутника.

2•. Сторони трикутника дорівнюють 26 см, 15 см і 37 см. Знайти найменшу з його висот.

3•. Дві сторони трикутника дорівнюють 9 см і 14 см, а синус кута між ними — $\frac{2\sqrt{6}}{5}$. Знайти третю сторону трикутника. Скільки розв'язків має задача?

4••. Знайти площу прямокутної трапеції, якщо радіус круга, вписаного в неї, дорівнює 12 см, а тупий кут трапеції дорівнює 150°.

4•. У паралелограмі $ABCD$ сторона BC дорівнює a, $\angle BAC = \alpha$, $\angle CAD = \beta$. Знайти другу сторону паралелограма та діагональ AC.

5••. Діагональ паралелограма дорівнює 21 см, кут проти неї — 120°, а одна із сторін паралелограма на 6 см більша за другу. Знайти другу діагональ паралелограма.

Тематичне оцінювання № 3

Тема: *Многокутники*

1°. Дано правильний десятикутник. Знайти:
1) величину внутрішнього кута десятикутника;
2) величину зовнішнього кута десятикутника.

2°. Знайти радіус кола, якщо центральному куту у 225° відповідає дуга довжиною 10 м.

3•. Скільки сторін має правильний многокутник, внутрішній кут якого на 108° більший за зовнішній?

4•. У коло вписано правильний шестикутник з стороною 4 см. Знайти сторону квадрата, описаного навколо цього кола.

5••. Радіус кола, описаного навколо правильного многокутника, дорівнює $4\sqrt{2}$ см, а сторона многокутника — 8 см. Знайти радіус кола, вписаного у многокутник та кількість його сторін.

Тематичне оцінювання № 4

Тема: *Площі фігур*

1°. Основи трапеції дорівнюють 8 см і 4 см, а її висота — 3 см. Знайти площу трапеції.

2°. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 16 см, а бічна сторона — 17 см. Знайти площу трикутника.

3•. Знайти площу круга, вписаного у правильний трикутник зі стороною 6 см.

Кути, вписані в коло

51. Визначити градусну міру кута, вписаного в коло, якщо відповідний йому центральний кут дорівнює:
1) 48°; 2) 126°; 3) 180°; 4) 254°; 5) α.

52. Визначити градусну міру центрального кута кола, якщо градусна міра відповідного йому вписаного кута дорівнює: 1) 17°; 2) 87°; 3) 90°; 4) 176°; 5) α.

53. Точка B кола і його центр O лежать по різні боки від хорди AC. Знайти: 1) кут ABC, якщо $\angle AOC = 124^\circ$; 2) кут AOC, якщо $\angle ABC = 94^\circ$.

54. Точки B і D лежать на колі по одну сторону від хорди AC, $\angle ABC = 42^\circ$. Знайти кут ADC.

55. Точки B і D лежать на колі по різні боки від хорди AC, $\angle ABC = 78^\circ$. Знайти кут ADC.

56. Навколо трикутника ABC описано коло з центром O. Знайти кут BOC, якщо: 1) $\angle A = 78^\circ$; 2) $\angle A = 128^\circ$.

57. У трикутнику ABC $\angle A = 36^\circ$, $\angle B = 78^\circ$, O — центр описаного кола. Знайти: $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle AOC$.

58. Визначити кути рівнобедреного трикутника, вписаного в коло, бічна сторона якого стягує дугу у 38°.

59. Хорда ділить коло у відношенні 5:7. Визначити величини вписаних кутів, які спираються на цю хорду.

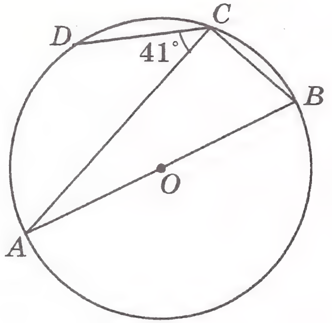
60. Хорда MN ділить коло на дві дуги. Градусна міра меншої з них дорівнює 140°, а більша ділиться точкою K у відношенні 5:6, починаючи від точки M. Знайти $\angle NMK$.

61. Коло поділено трьома точками на частини, які відносяться між собою, як 3:5:7. Точки поділу сполучено між собою. Визначити кути утвореного трикутника.

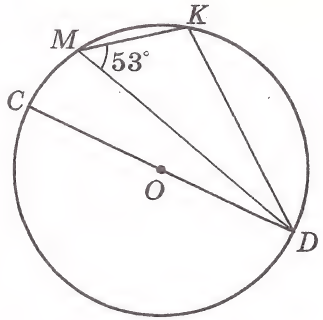
62. Точки C і D кола лежать по один бік від діаметра AB (мал. 10). Знайти кут DCB, якщо $\angle ACD = 41^\circ$.

63. Точки M і K кола лежать по один бік від діаметра CD (мал. 11). Знайти кут CDK, якщо $\angle DMK = 53^\circ$.

64. Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 78°. Півколо, побудоване на бічній стороні трикутника, як на діаметрі, ділиться іншими сторонами на три дуги. Скільки градусів містять ці дуги?



Мал. 10



Мал. 11

65. Продовження висоти CD трикутника ABC перетинає коло, описане навколо цього трикутника, в точці E. Цю точку з'єднано з точкою F, діаметрально протилежною точці C. Довести, що $EF \parallel AB$.

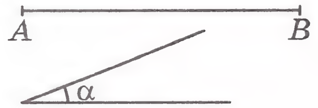
66. Два кола перетинаються в точках A і B. Через точку A проведено діаметри AD і AC. Довести, що точки B, C і D лежать на одній прямій.

67. O — центр кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника ABC. Знайти кути трикутника ABC, якщо $\angle AOB = 128^\circ$. Скільки розв'язків має задача?

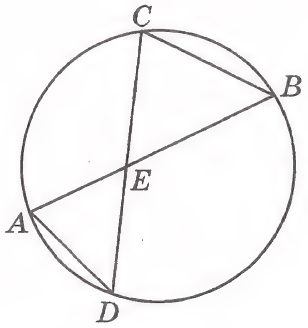
68. Знайти геометричне місце точок — середин усіх хорд, які проходять через дану точку кола.

69. Знайти геометричне місце точок, з яких даний відрізок AB видно під заданим кутом α (мал. 12).

70. Побудувати трикутник за основою, висотою, проведеною до основи, та кутом при вершині.



Мал. 12



Мал. 13

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ ЗНАНЬ

Варіант 2

Тематичне оцінювання № 1

Тема: *Подібність фігур*

1°. Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні. Знайти невідомі сторони цих трикутників, якщо $BC = 5$ см, $AB = 6$ см, $B_1C_1 = 15$ см, $A_1C_1 = 21$ см.

2°. Точка D кола і точка O — центр цього кола — лежать по один бік від хорди EF. Знайти кут EOF, якщо $\angle EDF = 39^\circ$.

3•. Сторони трикутника дорівнюють 3 см, 6 см і 8 см. Знайти сторони подібного йому трикутника, якщо в ньому сума найбільшої та найменшої сторін дорівнює 22 см.

4•. CD — висота прямокутного трикутника ABC, проведена до гіпотенузи, $AB = 12$ см, $BD = 8$ см. Знайти висоту CD трикутника та катети BC і AC.

5••. Через точку P, яка лежить всередині кола, проведено хорду, яка ділиться точкою P на відрізки, довжини яких дорівнюють 4 см і 5 см. Знайти відстань точки P від центра кола, якщо його радіус дорівнює 6 см.

Тематичне оцінювання № 2

Тема: *Розв'язування трикутників*

1°. Дві сторони трикутника дорівнюють 6 см і 4 см, а кут між ними — 120°. Знайти довжину третьої сторони трикутника.

2°. Два кути трикутника дорівнюють 60° і 45°, а сторона, що лежить проти більшого з цих кутів, дорівнює $3\sqrt{2}$ см. Знайти довжину сторони трикутника, яка лежить проти меншого з цих кутів.

3•. Знайти невідомі сторони та кути трикутника ABC, якщо $AB = 9$ см, $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 20^\circ$.

4•. Периметри подібних многокутників відносяться як 5:7, а сума їх площ дорівнює 296 см^2. Знайти площі многокутників.

5••. Бісектриса прямого кута прямокутного трикутника ділить гіпотенузу на відрізки довжиною 15 см і 20 см. Знайти площу трикутника.

Тематичне оцінювання № 5

Тема: *Узагальнення і систематизація знань учнів*

1°. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 12 см, а висота до неї 8 см. Знайти:

1) довжину середньої лінії трикутника, паралельну основі;
2) бічну сторону трикутника;
3) сінус кута при основі трикутника;
4) площу трикутника.

2•. Сторони трикутника дорівнюють 39 см, 42 см і 45 см. Знайти середню з висот трикутника.

3•. У трикутнику ABC $AB = 6$ см, $BC = 6\sqrt{3}$ см, $\angle C = 30°$. Знайти третю сторону трикутника. Скільки розв'язків має задача?

4••. Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює $6\sqrt{3}$ см, а тупий кут — 120°. Знайти площу трапеції, якщо відомо, що в неї можна вписати коло.

---

71. Хорди AB і CD кола перетинаються в точці E (мал. 13). Довести подібність трикутників ADE і BCE.

72. Хорди MK і PF кола перетинаються в точці E. Знайти довжину відрізка EF, якщо $ME = 4$ см, $EK = 3$ см, $PE = 2$ см.

73. Хорди AB і CD кола перетинаються в точці M, яка ділить хорду AB на відрізки довжиною 2 см і 9 см. На які відрізки ділить точка M хорду CD, якщо один з них більший за другий на 3 см?

Кут, утворений дотичною і хордою

74. Хорда AB стягує дугу у 58°. Визначити кути, які утворює хорда з дотичною до кола, проведеною через точку A.

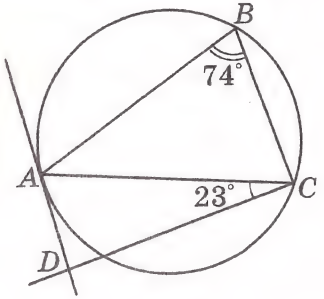
75. В кут ABC вписано коло, яке дотикається сторін кута в точках D і E. Ці точки ділять коло на частини, які відносяться як 3:7. Знайти кути трикутника BDE.

76. В трикутнику ABC $\angle B = 74°$. Навколо трикутника описано коло і через точку A до кола проведено дотичну. Промінь CD утворює з стороною AC кут 23° (мал. 14). Знайти кути трикутника ACD.

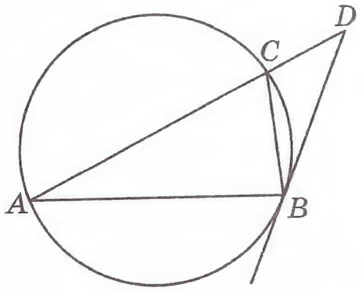
77. З точки D, яка знаходиться поза колом, проведено до нього дотичну DB і січну DA (мал. 15). Довести подібність трикутників ABD і BCD.

78. З точки A поза колом проведено до нього дотичну AK довжиною 4 см і січну AE довжиною 8 см. Знайти довжину відрізка AF січної, що міститься поза колом.

79. З точки поза колом проведено до нього дотичну довжиною 6 см і січну, відрізок якої, що лежить всередині кола, дорівнює 5 см. Знайти довжину відрізка січної, що міститься поза колом.



Мал. 14



Мал. 15

Чотирикутник, вписаний в коло

80. Чи можна описати коло навколо чотирикутника $ABCD$, якщо:
1) $\angle A = 33°$, $\angle C = 137°$; 2) $\angle B = 69°$, $\angle D = 111°$?

81. Знайти кути C і D чотирикутника $ABCD$, вписаного в коло, якщо $\angle A = 119°$, $\angle B = 84°$.

82. Чи можна описати коло навколо чотирикутника, кути якого у порядку слідування відносяться як:
1) 5 : 7 : 8 : 4; 2) 3 : 5 : 8 : 6?

83. Три кути чотирикутника, вписаного в коло, взяті у порядку слідування, відносяться як 2:6:7. Знайти кути чотирикутника.

84. Чотирикутник $ABCD$ вписано в коло. Діагональ AC цього чотирикутника є діаметром кола. Знайти кут між діагоналями чотирикутника, який лежить проти сторони AD, якщо $\angle BAC = 23°$, $\angle DAC = 52°$.

85. Через вершини A і B трикутника ABC проведено коло, яке перетинає сторони AC і BC трикутника в точках D і E відповідно. Довести, що трикутники ABC і EDC подібні. Знайти CD і CE, якщо $AC = 5$ см, $BC = 6$ см, $AB = 8$ см, $DE = 2$ см.

86. Рівнобічну трапецію, один з кутів якої дорівнює 54°, вписано в коло. Кут між діагоналями трапеції, що лежить проти бічної сторони, дорівнює 36°. Знайти положення центра кола, описаного навколо трапеції, відносно трапеції.

Теорема косинусів

87. Знайти сторону AC трикутника ABC, якщо:
1) $AB = 5$ см, $BC = 7$ см, $\angle B = 60°$;
2) $AB = 5\sqrt{2}$ см, $BC = 4$ см, $\angle B = 135°$.

88. Знайти косинуси кутів трикутника, сторони якого дорівнюють 5 см, 8 см і 11 см.

89. Дві сторони трикутника дорівнюють 6 см і 9 см, а синус кута між ними дорівнює $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Знайти третю сторону трикутника. Скільки розв'язків має задача?

90. Сторони паралелограма дорівнюють 8 см і 10 см, а кут між ними — 60°. Знайти діагоналі паралелограма.

4•. Діагональ d паралелограма утворює з його сторонами кути α і β. Знайти довжини сторін паралелограма.

5••. Гострий кут рівнобічної трапеції дорівнює 60°, а більша основа більша за бічну сторону на 10 см. Знайти меншу основу трапеції, якщо її діагональ дорівнює 14 см.

Тематичне оцінювання № 3

Тема: *Многокутники*

1°. Дано правильний восьмикутник. Знайти:
1) величину внутрішнього кута восьмикутника;
2) величину зовнішнього кута восьмикутника.

2°. Радіус кола дорівнює 16 м. Знайти довжину дуги кола, що відповідає центральному куту у 54°.

3•. Скільки сторін має правильний многокутник, внутрішній кут якого у 11 разів більший від зовнішнього?

4•. Сторона правильного трикутника, вписаного в коло, дорівнює $5\sqrt{3}$ см. Знайти сторону правильного шестикутника, описаного навколо цього кола.

5••. Радіус кола, описаного навколо правильного многокутника, дорівнює $2\sqrt{3}$ см, а радіус кола, вписаного в нього, — 3 см. Знайти сторону многокутника та кількість його сторін.

Тематичне оцінювання № 4

Тема: *Площі фігур*

1°. Дві сторони паралелограма дорівнюють 4 см і 6 см, а кут між ними 30°. Знайти площу паралелограма.

2°. Знайти площу рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого дорівнює 15 см, а висота, проведена до основи, — 9 см.

3•. Знайти площу круга, вписаного у правильний шестикутник зі стороною 8 см.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ ЗНАНЬ

Варіант 1

Тематичне оцінювання № 1

Тема: *Подібність фігур*

1°. Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні. Знайти невідомі сторони цих трикутників, якщо $AB = 8$ см, $BC = 10$ см, $A_1B_1 = 4$ см, $A_1C_1 = 6$ см.

2°. Точка B кола і точка O — центр цього кола — лежать по один бік від хорди AC. Знайти кут ABC, якщо $\angle AOC = 146°$.

3•. Сторони трикутника дорівнюють 4 см, 7 см і 8 см. Знайти сторони подібного йому трикутника, якщо його периметр дорівнює 57 см.

4•. Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює 4 см і ділить її на відрізки, різниця яких дорівнює 6 см. Знайти сторони трикутника.

5••. Через точку M, яка знаходиться на відстані 5 см від центра кола радіусом 9 см, проведено хорду, яка ділиться точкою M на відрізки, різниця довжин яких дорівнює 1 см. Знайти довжину цієї хорди.

Тематичне оцінювання № 2

Тема: *Розв'язування трикутників*

1°. Дві сторони трикутника дорівнюють 4 см і 8 см, а кут між ними — 60°. Знайти довжину третьої сторони трикутника.

2°. Два кути трикутника дорівнюють 30° і 135°, а сторона, що лежить проти меншого з них, дорівнює 4 см. Знайти довжину сторони трикутника, яка лежить проти більшого з цих кутів.

3•. Знайти невідомі сторони та кути трикутника ABC, якщо $AB = 6$ см, $AC = 10$ см, $\angle A = 110°$.

91. На сторонах AB і AC прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) взято точки D і E відповідно. Знайти довжину відрізка DE, якщо $AC = 4$ см, $BC = 2\sqrt{5}$ см, $CE = 1$ см, $BD = 2$ см.

92. Катет AC рівнобедреного прямокутного трикутника ABC дорівнює 2 см. На продовженні гіпотенузи AB за точку B взято таку точку D, що $BD = BC$. Знайти CD.

93. Одна сторона трикутника на 5 см більша за другу, а кут між ними дорівнює 60°. Знайти периметр трикутника, якщо третя сторона дорівнює 7 см.

94. Дві сторони трикутника відносяться як 5:3, а кут між ними дорівнює 120°. Знайти ці сторони, якщо периметр трикутника дорівнює 15 см.

95. Дві сторони трикутника дорівнюють 8 см і 7 см, а кут проти меншої з них — 60°. Знайти третю сторону трикутника.

96. У рівнобічній трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) $BC = 8$ см, $AD = 12$ см, $AB = CD = 10$ см. Знайти довжини діагоналей трапеції, використовуючи теорему косинусів.

97. У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює a, а кут при основі — α. Знайти довжину медіани, проведеної до бічної сторони трикутника.

98. Сторони чотирикутника, взяті у порядку слідування, дорівнюють a, b, c і d. Знайти косинус кута між сторонами b і c, якщо навколо чотирикутника можна описати коло.

99. Для сторін трикутника виконується рівність $a^2 = b^2 + c^2 + bc$. Довести, що кут проти сторони a дорівнює 120°.

100. Сторони трикутника дорівнюють 20 см і 12 см, а кут між ними — 120°. Знайти довжину медіани, проведеної до третьої сторони трикутника.

Сума квадратів діагоналей паралелограма

101. Знайти діагоналі паралелограма, якщо вони відносяться як 6:7, а сторони паралелограма дорівнюють 14 см і 22 см.

102. Одна із сторін паралелограма на 5 см більша за другу, а діагоналі паралелограма дорівнюють 17 см і 19 см. Знайти сторони паралелограма.

103. Сторони трикутника дорівнюють 8 см, 9 см і 13 см. Знайти довжину медіани трикутника, проведеної до найбільшої сторони.

104. У трикутнику ABC $AB = 7$ см, $BC = 9$ см, BM — медіана. Знайти сторону AC, якщо $BM : AC = 2 : 7$.

105. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 8 см, а медіана, проведена до неї, — 6 см. Знайти основу трикутника.

106. Медіани AM_1 і BM_2 трикутника ABC дорівнюють 12 см і 15 см, а кут AMB дорівнює 60° (M — точка перетину медіан). Знайти довжину третьої медіани.

107. Довести, що у кожному опуклому чотирикутнику сума квадратів діагоналей вдвічі більша за суму квадратів відрізків, які з'єднують середини протилежних сторін чотирикутника.

Теорема синусів

108. У трикутнику ABC $BC = 5\sqrt{3}$ см, $\angle A = 60°$, $\angle B = 45°$. Знайти сторону AC.

109. У трикутнику ABC $AB = 3\sqrt{2}$ см, $\angle A = 15°$, $\angle C = 135°$. Знайти сторону AC.

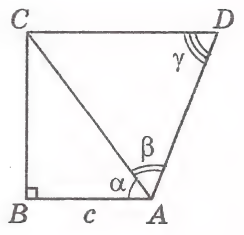
110. У трикутнику ABC $AB = 13$ см, $BC = 8$ см. Чи може $\sin \angle A = \frac{2}{3}$?

111. У трикутнику ABC $BC = a$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. Знайти сторони AC і AB.

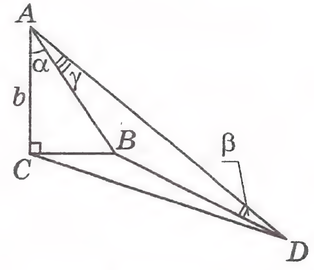
112. На мал. 16 $AB = c$, $\angle B = 90°$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle CAD = \beta$, $\angle D = \gamma$. Знайти AD.

113. У прямокутному трикутнику гіпотенуза дорівнює c, а гострий кут α. Знайти довжину бісектриси прямого кута.

114. Діагональ AC паралелограма $ABCD$ дорівнює d і ділить кут A на кути α і β. Знайти сторони та другу діагональ паралелограма.



Мал. 16



Мал. 17

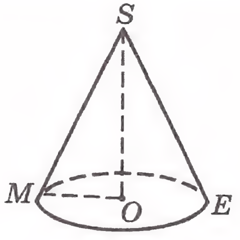
413. Прямокутник, сторони якого дорівнюють 14 см і 4 см, обертається навколо прямої, що проходить через середини протилежних менших сторін прямокутника. Знайти площу повної поверхні і об'єм утвореного циліндра.

Конус

414. На мал. 119 зображено конус. Назвати відрізок, що є:

1) висотою конуса;
2) твірною конуса;
3) радіусом основи конуса.

415. Радіус основи конуса дорівнює 10 см, а твірна 26 см. Знайти площу повної поверхні і об'єм конуса.



Мал. 119

416. Рівнобедрений прямокутний трикутник з гіпотенузою 8 см обертається навколо висоти до гіпотенузи. Знайти площу повної поверхні і об'єм утвореного конуса.

417. Катет прямокутного трикутника дорівнює a, а гіпотенуза c. Трикутник обертається спочатку навколо катета a, а потім навколо другого катета. Знайти відношення об'ємів отриманих конусів.

Куля

418. Знайти площу поверхні і об'єм кулі, радіус якої дорівнює 5 см.

419. Півкруг, діаметр якого дорівнює 10 см, обертається навколо цього діаметра. Знайти площу поверхні і об'єм утвореної кулі.

420. У скільки разів треба збільшити радіус кулі, щоб її об'єм збільшився у 8 разів? Як при цьому зміниться площа поверхні кулі?

405. Усі бічні грані правильної шестикутної піраміди — правильні трикутники зі стороною 2 см. Знайти площу повної поверхні піраміди.

406. Обчислити площу повної поверхні правильної чотирикутної піраміди, розгортку якої зображено на мал. 116.

407. Бічні ребра MA, MB, MC, MD і ME п'ятикутної піраміди $MABCDE$ рівні між собою, $\angle AMB = \angle BMC = \angle CMD = \angle DME = \angle EMA = 30^\circ$. Знайти площу бічної поверхні піраміди, якщо $MA = 8$ см.

408. В основі піраміди лежить правильний трикутник зі стороною 6 см. Знайти об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює 6 см.

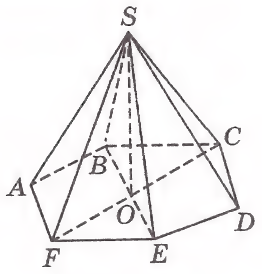
409. Знайти об'єм правильної шестикутної піраміди (мал. 117), основа якої — шестикутник $ABCDEF$ зі стороною 3 см, SO — висота піраміди, $SO = 6$ см.

410. В основі трикутної піраміди лежить рівнобедрений трикутник ABC, $AB = AC$, $BC = 8$ см, $\angle A = 120^\circ$. Знайти об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює 9 см.

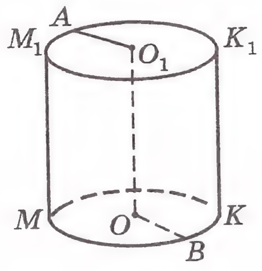
Циліндр

411. На мал. 118 зображено циліндр. Назвати відрізок, що є:
1) висотою циліндра;
2) твірною циліндра;
3) радіусом нижньої основи циліндра;
4) радіусом верхньої основи циліндра.

412. Радіус основи циліндра дорівнює 8 см, а його висота 10 см. Знайти площу повної поверхні і об'єм циліндра.



Мал. 117



Мал. 118

115. У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює a, а кут при основі α. Знайти довжину бісектриси кута при основі трикутника.

116. Два кути трикутника дорівнюють α і β, а бісектриса третього кута трикутника дорівнює l. Знайти сторони трикутника.

117. На мал. 17 $AC = b$, $\angle CAB = \alpha$, $\angle BDA = \beta$, $\angle BAD = \gamma$. Знайти CD.

118. Різниця сторін AB і BC трикутника ABC дорівнює 4 см, $\angle C = 60^\circ$, $\angle A = 45^\circ$. Знайти сторони AB і BC трикутника ABC.

119. CM — медіана трикутника ABC. Довести, що $AC : BC = \sin \angle MCB : \sin \angle MCA$.

120. Знайти сторони трикутника, периметр якого дорівнює P, а два кути — α і β.

Співвідношення між кутами трикутника та протилежними сторонами

121. У трикутнику ABC $AB > BC > AC$. Порівняти кути A, B і C.

122. У трикутнику ABC $\angle A = 43^\circ$, $\angle B = 82^\circ$. Порівняти сторони AB, BC і AC.

123. У трикутнику ABC AB — найменша сторона. Чи може кут C дорівнювати 61°?

124. Визначити вид трикутника, сторони якого дорівнюють:
1) 3 см, 4 см, 6 см;
2) 8 см, 15 см, 17 см.
2) 5 см, 6 см, 7 см;

125. У трикутнику ABC $\angle B > 90^\circ$. На продовженні сторони AB за точку B взяли довільну точку D і з'єднали її з точкою C. Довести, що $CD > BC$.

126. У трикутнику ABC $BC > AB$, BM — медіана. Довести, що $\angle ABM > \angle CBM$.

127. У трикутників ABC і KPE $AB = KP$, $BC = PE$, $AC > KE$. Довести, що $\angle B > \angle P$.

128. У трикутнику ABC $\angle C = 90^\circ$, $\angle B > \angle A$, CD — висота. Довести, що $AD > BD$.

129. У трикутнику ABC $AC = 6$ см, $AB = 3\sqrt{2}$ см, $\angle B = 45^\circ$. Знайти кут C.

130. У трикутнику ABC $AB = 8$ см, $BC = 4\sqrt{6}$ см, $\angle C = 45^\circ$. Знайти кут A. Скільки розв'язків має задача?

Властивість бісектриси трикутника

131. BD — бісектриса кута B трикутника ABC. Знайти:
   1) відрізки AD і DC, якщо $AB = 8$ см, $BC = 14$ см, $AC = 11$ см;
   2) сторону AB, якщо $AD : DC = 7 : 8$, $BC = 24$ см;
   3) сторону AC, якщо $AB : BC = 2 : 3$, $CD - AD = 3$ см;
   4) сторони AB, BC і AC, якщо $AB + BC = 56$ см, $AD = 9$ см, $DC = 15$ см.

132. Точка D лежить на стороні AB трикутника ABC. Порівняти кути ACD і BCD, якщо $AC = 12$ см, $BC = 15$ см, $AD = 6$ см, $BD = 12$ см.

133. Бісектриса гострого кута прямокутного трикутника ділить протилежний катет у відношенні 2:1. Знайти гострі кути трикутника.

134. Бісектриса прямого кута прямокутного трикутника ділить гіпотенузу на відрізки довжиною 15 см і 20 см. Знайти катети.

135. Бісектриса гострого кута прямокутного трикутника ділить катет у відношенні 5:3, а різниця цих відрізків дорівнює 6 см. Знайти сторони трикутника.

136. Висота BD трикутника ABC дорівнює 24 см і ділить сторону AC на відрізки $AD = 7$ см і $DC = 10$ см. На які відрізки ділить сторону AC бісектриса кута B?

137. Периметр прямокутника дорівнює 42 см, а його діагональ ділиться бісектрисою прямого кута на відрізки, довжини яких відносяться як 3:4. Знайти діагональ прямокутника.

138. Бісектриса кута прямокутника ділить його сторону на відрізки довжиною 10 см і 14 см, починаючи від найближчої до цього кута вершини. На які відрізки ділить ця бісектриса діагональ прямокутника?

139. Діагональ рівнобічної трапеції ділить висоту, проведену з вершини тупого кута, на відрізки довжиною 15 см і 12 см, а бічна сторона трапеції дорівнює її меншій основі. Знайти сторони трапеції.

140. У трикутник ABC вписано ромб $ADEF$ так, що кут A у них спільний, а вершина E належить стороні BC. Знайти довжини відрізків BE і EC, якщо $AB = 21$ см, $BC = 18$ см, $AC = 15$ см.

   3) ребра, мимобіжні з ребром DD_1;
   4) ребра, паралельні грані BB_1C_1;
   5) ребра, перпендикулярні грані AA_1D_1;
   6) грані, перпеникулярні грані DD_1C_1.

398. Знайти повну поверхню і об'єм куба з ребром 6 см.

399. Знайти площу бічної поверхні, площу повної поверхні і об'єм прямокутного паралелепіпеда (мал. 114), якщо $BC = 10$ см, $CD = 6$ см, $CC_1 = 8$ см.

400. В основі прямої призми лежить ромб зі стороною 4 см і гострим кутом 30°. Знайти площу бічної поверхні, площу повної поверхні і об'єм призми, якщо її висота дорівнює 9 см.

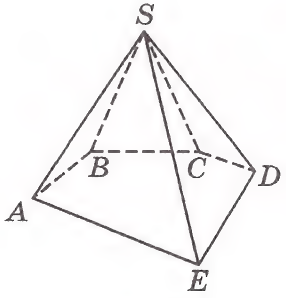
401. Сторона основи правильної шестикутної призми дорівнює 2 см, а висота 9 см. Знайти площу бічної поверхні і об'єм призми.

402. В основі прямої призми лежить трикутник зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см. Знайти площу бічної поверхні і об'єм призми, якщо її висота дорівнює 6 см.

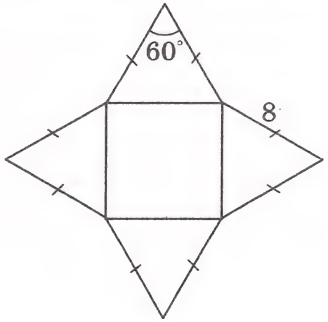
403. В основі прямої призми лежить рівнобічна трапеція, основи якої 4 см і 8 см, а гострий кут 60°. Знайти площу повної поверхні і об'єм призми, якщо її висота дорівнює 10 см.

Піраміда

404. На мал. 115 зображено піраміду $SABCDE$. Назвати:
   1) основу піраміди;
   2) вершину піраміди;
   3) бічні ребра піраміди;
   4) бічні грані піраміди.



Мал. 115



Мал. 116

Взаємне розміщення прямих і площин у просторі

386. Скільки різних площин можна провести через одну точку?

387. Скільки різних площин можна провести через дві прямі, що перетинаються?

388. Чи можна стверджувати, що дві прямі, які не мають спільних точок, паралельні: 1) на площині; 2) у просторі?

389. Прямі AB і CD мимобіжні. Чи можуть перетинатись прямі AC і BD?

390. Через точки A і B прямої l проведені перпендикулярні до неї прямі і на них відмічені такі точки C і D відповідно, що $AC = BD$. Чи вірно, що прямі AB і CD паралельні: 1) на площині; 2) у просторі?

391. Прямі a і b перетинаються і прямі b і c перетинаються. Чи вірно, що прямі a і c перетинаються?

392. Пряма a паралельна прямій b, яка лежить у площині α. Скільки ще існує у площині α прямих, паралельних прямій a?

393. Прямі a і b паралельні площині α. Чи вірно, що прямі a і b паралельні?

394. Прямі a і b паралельні. Площина α паралельна прямій a, а площина β — прямій b. Чи вірно, що площини α і β паралельні?

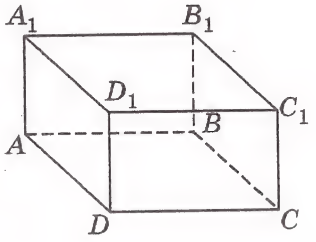
395. Пряма a перпендикулярна площині α, а пряма b паралельна прямій a. Чи вірно, що пряма b перпендикулярна площині α?

396. Площини α і β перпендикулярні площині γ. Чи паралельні площини α і β?

Призма

397. На мал. 114 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Вказати:

1) ребра, паралельні ребру BB_1;
2) ребра, перпендикулярні ребру CD;



Мал. 114

141. Бісектриса тупого кута паралелограма, рівного 120°, ділить сторону на відрізки довжиною 12 см і 8 см, рахуючи від вершини гострого кута. Знайти відрізки, на які бісектриса цього кута ділить діагональ паралелограма.

142. У трикутнику, сторони якого дорівнюють 13 см, 18 см і 21 см, проведено півколо, центр якого належить меншій стороні трикутника і яке дотикається двох інших сторін. На які відрізки центр півкола ділить меншу сторону?

143. Центр кола, вписаного в рівнобедрений трикутник, ділить висоту, проведену до основи, на відрізки довжиною 5 см і 4 см. Знайти сторони трикутника.

144. Висота рівнобедреного трикутника дорівнює 24 см, а бічна сторона відноситься до основи як 7:10. Знайти радіус кола, вписаного в трикутник.

145. У рівнобедреному трикутнику радіус вписаного кола у 4 рази менший від висоти, проведеної до основи, а периметр трикутника дорівнює 72 см. Знайти сторони трикутника.

146. Бісектриса BD трикутника ABC ділить сторону AC на відрізки $AD = 6$ см і $DC = 8$ см. Знайти довжину бісектриси, якщо $\angle BDC = 120^\circ$.

Формула $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$

147. У трикутнику ABC $AB = 6$ см, $\angle C = 30^\circ$. Знайти радіус кола, описаного навколо цього трикутника.

148. За допомогою наслідку з теореми синусів знайти сторони рівностороннього трикутника за радіусом R описаного кола.

149. Дві сторони трикутника дорівнюють $3\sqrt{2}$ см і 4 см. Знайти третю сторону трикутника, якщо вона відноситься до радіуса описаного кола як $\sqrt{2} : 1$. Скільки розв'язків має задача?

150. У трикутнику ABC $\angle A = 54^\circ$, $\angle B = 66^\circ$, AK — висота трикутника. Знайти радіус кола, описаного навколо трикутника ABK, якщо радіус кола, описаного навколо трикутника ABC, дорівнює 6 см.

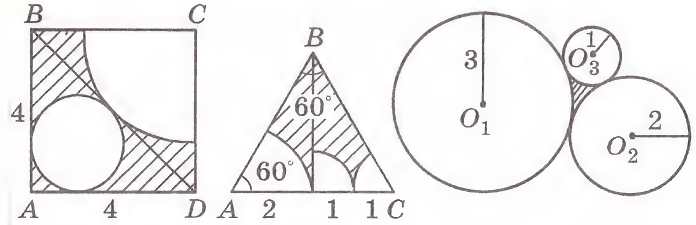
151. У трикутнику ABC H — точка перетину висот. Знайти радіус кола, описаного навколо трикутника ABC, якщо радіус кола, описаного навколо трикутника AHB, дорівнює R.
152. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 24 см, а бічна сторона — 13 см. Знайти радіус кола, описаного навколо трикутника.
153. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 24 см і 8 см, а бічна сторона — 12 см. Знайти радіус кола, описаного навколо трапеції.
154. У коло, радіус якого 4 см, вписано трапецію, основа якої у 2 рази більша за кожну з інших сторін. Знайти діагоналі трапеції.
155. У трикутнику ABC O — точка перетину бісектрис, $\angle AOC = 120^\circ$. Довести, що радіуси кіл, описаних навколо трикутників ABC і AOC, рівні.

Розв'язування трикутників

156. Знайти невідомі сторони і кути трикутника ABC, якщо:

1) $AC = 8$ см, $\angle B = 48^\circ$, $\angle C = 56^\circ$;
2) $AB = 12$ см, $\angle A = 17^\circ$, $\angle B = 54^\circ$;
3) $AB = 9$ см, $BC = 6$ см, $\angle B = 70^\circ$;
4) $AB = 4$ см, $BC = 5$ см, $\angle B = 110^\circ$;
5) $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $AC = 7$ см;
6) $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, $AC = 6$ см;
7) $AB = 4$ см, $BC = 6$ см, $\angle A = 100^\circ$;
8) $AB = 8$ см, $BC = 9$ см, $\angle A = 40^\circ$;
9) $AB = 6$ см, $BC = 5$ см, $\angle A = 20^\circ$;
10) $AB = 6$ см, $BC = 3$ см, $\angle A = 40^\circ$.

157. У трикутнику ABC $AB = BC = 6$ см, $\angle B = 40^\circ$. Знайти: 1) сторону AC; 2) висоту AD; 3) медіану AM; 4) бісектрису BK; 5) радіус описаного кола; 6) радіус вписаного кола.
158. Діагональ BD рівнобічної трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) дорівнює 4 см, $\angle CDB = 36^\circ$, $\angle BDA = 48^\circ$. Знайти: 1) сторони трапеції; 2) радіус кола, описаного навколо трикутника BCD; 3) радіус кола, вписаного в трикутник AOD (O — точка перетину діагоналей трапеції).



Мал. 113

376. Знайти площі заштрихованих фігур, зображених на мал. 113.
377. Сторони трикутника дорівнюють 20 см, 34 см і 42 см. Знайти відношення площ описаного та вписаного у цей трикутник кругів.
378. Площа круга, вписаного у рівнобічну трапецію, дорівнює 16π см^2, а тупий кут трапеції дорівнює 150°. Знайти площу трапеції.
379. Два круга мають спільну хорду. Знайти відношення площ цих кругів, якщо з центра першого круга спільну хорду видно під кутом 60°, а з центра другого — під кутом 90°.
380. В квадрат вписано коло і навколо нього описано коло. Знайти площу кругового кільця, що міститься між цими колами, якщо сторона квадрата дорівнює 5 см.
381. Довжини сторін трикутника дорівнюють 10 см, 17 см і 21 см. В трикутник вписано півкруг, центр якого лежить на більшій стороні трикутника. Знайти площу півкруга.
382. У півкруг, діаметр якого дорівнює 10 см, вписано трапецію, більша основа якої співпадає з діаметром півкруга, а гострий кут дорівнює 60°. Знайти площу тієї частини півкруга, що лежить поза трапецією.
383. Радіус круга дорівнює 12 см. В ньому проведено хорду, довжина якої дорівнює довжині сторони вписаного правильного шестикутника. Знайти площу більшого із сегментів, що визначаються цією хордою.
384. Знайти площу круга, вписаного у сектор круга радіуса 4 см з центральним кутом, рівним 120°.
385. Радіус круга дорівнює 6 см. По одну сторону від центра круга проведено дві паралельні хорди, одна з яких дорівнює стороні правильного вписаного трикутника, а друга — стороні вписаного квадрата. Знайти площу тієї частини круга, яка міститься між хордами.

360. Сторони трикутника дорівнюють 10 см, 17 см і 24 см. Бісектрису, проведену до меншої сторони, поділено у відношенні 2:5, рахуючи від вершини, і через точку поділу проведено пряму, паралельну стороні. Знайти площу отриманої при цьому трапеції.

Площа круга та його частин

361. Знайти площу круга, радіус якого дорівнює: 1) 3 см; 2) $\frac{5}{\pi}$ см; 3) $\frac{7}{\sqrt{\pi}}$ см.

362. Знайти з точністю до десятих радіус круга, площа якого дорівнює 16 см^2.

363. Площі двох кругів відносяться як 4:9. Чому дорівнює відношення їх радіусів?

364. Знайти площу круга, довжина кола якого дорівнює 10π см.

365. Площі двох кругів дорівнюють a см^2 і b см^2. Чому дорівнює відношення довжин відповідних кіл?

366. Знайти площу круга, вписаного в рівносторонній трикутник, площа якого дорівнює $4\sqrt{3}$ см^2.

367. Знайти відношення площ вписаного і описаного кругів для правильного трикутника.

368. Знайти площу кільця, розміщеного між двома концентричними колами, радіуси яких дорівнюють 3 см і 7 см.

369. Знайти площу сектора круга радіуса 4 см, якщо відповідний цьому сектору центральний кут дорівнює: 1) 40°; 2) 100°; 3) 300°.

370. Яку частину круга становить площа сектора, якщо відповідний сектору центральний кут дорівнює: 1) 15°; 2) 110°; 3) 240°?

371. Площа сектора становить $\frac{9}{20}$ площі круга. Знайти градусну міру центрального кута, який відповідає даному сектору.

372. Знайти радіус круга, якщо площа сектора цього круга дорівнює 60 см^2, а центральний кут, що відповідає цьому сектору, дорівнює 54°.

373. Знайти площу кругового сегмента, якщо радіус круга дорівнює 10 см, а дуга містить: 1) 45°; 2) 120°; 3) 240°.

374. Знайти площу кругового сегмента, якщо його основа дорівнює 8 см, а дуга сектора містить: 1) 60°; 2) 225°.

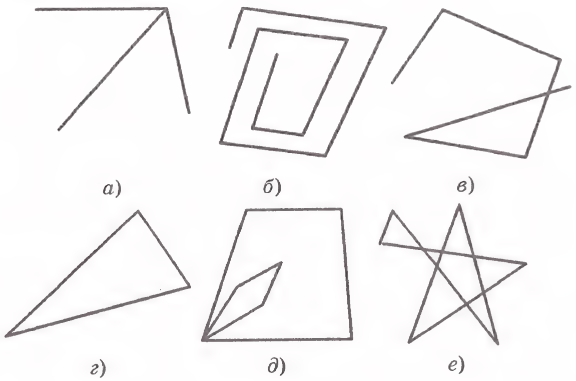
375. За якої умови об'єднанням кількох секторів є сегмент?

159. Більша сторона трикутника, вписаного в коло, дорівнює 6 см, а вершини трикутника ділять коло на три дуги, градусні міри яких відносяться як 1:4:7. Знайти невідомі сторони трикутника.

160. На сторонах трикутника ABC ($AB = a$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$) зовні нього побудовано правильні трикутники і їх вершини послідовно з'єднано. Визначити периметр отриманого трикутника. Розв'язати задачу у загальному випадку, а також обчислити, якщо $AB = 4$ см, $\angle A = 40°$, $\angle B = 105°$.

Ламана. Опуклий многокутник

161. Які з наведених на мал. 18 фігур можна назвати ламаними? Відповідь обгрунтувати. Серед вибраних ламаних вказати прості.



Мал. 18

162. Чи можуть ланки замкненої ламаної дорівнювати: 1) 3 см, 5 см, 9 см, 16 см; 2) 2 см, 9 см, 3 см, 1 см, 3 см; 3) 5 см, 8 см, 19 см, 2 см, 3 см? Відповідь обгрунтувати.

163. Скільки діагоналей можна провести з однієї вершини опуклого семикутника? Знайти загальну кількість діагоналей опуклого семикутника.

164. Довести, що в опуклому п'ятикутнику сума довжин діагоналей більша за суму довжин сторін.

165. Довести, що сума довжин двох медіан трикутника більша за довжину його третьої медіани.

166. Довести, що сума медіан трикутника більша за його півпериметр, але менша від периметра.

Сума внутрішніх та зовнішніх кутів опуклого многокутника

167. Чи можна побудувати опуклий п'ятикутник, усі кути якого прямі?

168. Чи може найменший кут опуклого дев'ятикутника дорівнювати 141°?

169. Як зміниться сума внутрішніх кутів опуклого многокутника, якщо кількість його сторін збільшиться на три?

170. Визначити кути опуклого семикутника, якщо їх градусні міри відносяться як 4:5:6:7:7:8:8.

171. Знайти кути опуклого чотирикутника, якщо один з них дорівнює 60°, другий та третій відносяться як 7:3, а четвертий дорівнює півсумі другого та третього.

172. Яку найбільшу кількість гострих кутів може мати опуклий многокутник?

173. Чи може один з кутів опуклого п'ятикутника бути більшим за суму чотирьох інших?

174. В опуклому многокутнику сума його внутрішніх кутів дорівнює 1620°. Знайти кількість його сторін та діагоналей.

175. В опуклому многокутнику 77 діагоналей. Знайти кількість його сторін та суму кутів.

176. Сума внутрішніх кутів опуклого многокутника у 2 рази більша за суму його зовнішніх кутів. Скільки сторін у цього многокутника?

177. Знайти кількість сторін опуклого многокутника, у якого сума внутрішніх кутів більша за суму зовнішніх на 540°.

Правильний многокутник

178. Чи існує п'ятикутник, усі кути якого рівні і який не є правильним?

348. Діагоналі опуклого чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці M. Площі трикутників AMB, AMD і DMC відповідно дорівнюють 4 см^2, 12 см^2 і 9 см^2. Знайти площу чотирикутника.

349. В коло вписано чотирикутник, послідовні сторони якого дорівнюють 7 см, 24 см, 20 см і 15 см. Знайти його площу.

Площі подібних фігур

350. Сторони двох рівносторонніх трикутників відносяться як 2:3. Як відносяться їх площі?

351. Діагональ одного квадрата вдвічі більша за діагональ іншого квадрата. Як відносяться їх площі?

352. У трикутнику провели середню лінію. Як відноситься площа отриманого трикутника до площі даного трикутника?

353. Сторони двох правильних шестикутників відносяться як 3:5, а площа меншого з них дорівнює 72 см^2. Знайти площу більшого шестикутника.

354. Площа многокутника дорівнює 80 см^2. Знайти площу подібного йому многокутника, якщо відповідні сторони цих многокутників дорівнюють 10 см і 6 см. Скільки розв'язків має задача?

355. Пряма, паралельна основі трикутника, ділить його на дві частини — трикутник і трапецію. Площі цих фігур відносяться як 1:4 відповідно. Знайти периметр даного трикутника, якщо периметр отриманого трикутника дорівнює 20 см.

356. Сторону AB трикутника ABC поділено у відношенні 1:2:3, рахуючи від вершини A, і через точки поділу проведено прямі, паралельні стороні BC. Знайти відношення площ отриманих частин.

357. Медіана трикутника дорівнює 6 см. Пряма, паралельна медіані, ділить трикутник на частини, площі яких відносяться як 5:7. Знайти довжину відрізка цієї прямої, що міститься між сторонами трикутника.

358. На діагоналі AC квадрата $ABCD$ взято точку M так, що $AM : MC = 8 : 3$. Пряма DM перетинає сторону BC в точці N. Знайти площу трикутника AMD, якщо площа трикутника NMC дорівнює 12 см^2.

359. Провести пряму, паралельну медіані даного трикутника, так, щоб вона відтинала $\frac{1}{8}$ частину його площі.

334. Площа трапеції дорівнює 108 $см^2$, а її висота — 6 см. Знайти основи трапеції, якщо їх різниця дорівнює 8 см.

335. Знайти площу трапеції, основи якої дорівнюють 8 см і 22 см, а бічні сторони — 26 см і 28 см.

336. Точки дотику кола, вписаного в рівнобічну трапецію, ділять її бічну сторону на відрізки довжиною 9 см і 16 см. Знайти площу трапеції.

337. Площа рівнобічної трапеції дорівнює $50\sqrt{2}$ $см^2$, а гострий кут — 45°. Знайти висоту трапеції, якщо відомо, що в неї можна вписати коло.

338. Бічні сторони трапеції дорівнюють 15 см і 13 см, а довжини основ відносяться як 1:3. Знайти площу трапеції, якщо відомо, що в неї можна вписати коло.

339. Точка дотику кола, вписаного в прямокутну трапецію, ділить більшу бічну сторону на відрізки, довжини яких відносяться як 4:9. Знайти площу трапеції, якщо менша з бічних сторін дорівнює 24 см.

340. Навколо рівнобічної трапеції описано коло. Кут між радіусами цього кола, проведеними до кінців бічної сторони, дорівнює 120°. Знайти площу трапеції, якщо її середня лінія дорівнює 8 см.

Площа многокутника

341. Площа чотирикутника дорівнює півдобутку його діагоналей. Довести, що діагоналі чотирикутника перпендикулярні.

342. На сторонах *AB* і *BC* рівностороннього трикутника *ABC* зовні побудовано квадрати *ABDK* і *CBFN* відповідно. Знайти площу шестикутника *AKDFNC*.

343. Виразити площу правильного шестикутника через довжину його меншої діагоналі.

344. Визначити площу правильного шестикутника, якщо радіус вписаного в нього кола дорівнює 4 см.

345. Знайти відношення сторін правильних трикутника, чотирикутника та шестикутника, площі яких рівні.

346. Сторона правильного шестикутника дорівнює 3 см. Його сторони, взяті через одну, продовжили до перетину так, що утворився рівносторонній трикутник. Знайти площу цього трикутника.

347. Сторона правильного трикутника дорівнює 4 см. Навколо нього описано коло, а навколо кола — правильний шестикутник. Знайти площу шестикутника.

179. Чи всі правильні многокутники мають вісь симетрії?

180. Знайти величини внутрішніх та зовнішніх кутів правильного n-кутника, якщо n дорівнює: 1) 5; 2) 9; 3) 12.

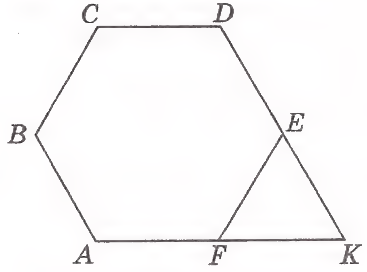
181. Знайти кількість сторін правильного многокутника, якщо: 1) його внутрішній кут дорівнює 168°; 2) його зовнішній кут дорівнює 18°.

182. Визначити кількість сторін правильного многокутника, у якого зовнішній кут становить $\frac{2}{3}$ внутрішнього.

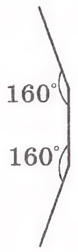
183. Сума зовнішніх кутів правильного многокутника разом з одним із внутрішніх кутів становить 532°. Знайти кількість сторін многокутника.

184. На мал. 19 зображено правильний шестикутник *ABCDEF*, *K* — точка перетину продовжень сторін *DE* і *AF*. Знайти кут *AKD*.

185. На мал. 20 зображено кілька послідовних сторін правильного многокутника. Як визначити загальну кількість його сторін?



Мал. 19



Мал. 20

186. Знайти величину центрального кута правильного n-кутника, якщо n дорівнює: 1) 3; 2) 9; 3) 15.

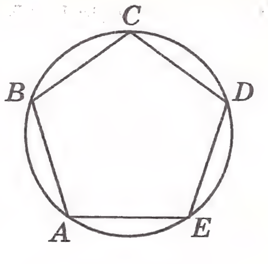
187. Центральний кут правильного многокутника дорівнює 15°. Знайти кількість сторін многокутника.

188. Який найбільший центральний кут може мати правильний многокутник?

189. На мал. 21 зображено правильний п'ятикутник, вписаний в коло. Як найпростіше на цьому малюнку побудувати правильний десятикутник?

190. За даною стороною a побудувати правильний восьмикутник.

191. Описати навколо даного кола правильний шестикутник.



Мал. 21

192. AB, BC і CD — три послідовні сторони правильного многокутника з центром O. Продовження сторін AB і CD перетинаються в точці M. Довести, що навколо чотирикутника $MAOC$ можна описати коло.

193. У коло вписано многокутник, усі кути якого рівні. Чи можуть бути нерівними його сторони?

194. Довести, що якщо послідовно з'єднати середини сторін правильного многокутника, то отриманою фігурою буде правильний многокутник з тією ж самою кількістю сторін.

195. П'ятикутник має дві осі симетрії. Довести, що він правильний.

Залежність між сторонами та радіусами вписаного та описаного кіл правильного многокутника

196. Сторона правильного трикутника дорівнює 4 см. Знайти радіуси вписаного та описаного навколо нього кіл.

197. Радіус кола, описаного навколо квадрата, дорівнює $5\sqrt{2}$ см. Знайти сторону квадрата та радіус вписаного в нього кола.

198. Радіус кола, вписаного в правильний шестикутник, дорівнює $4\sqrt{3}$ см. Знайти сторону шестикутника та радіус описаного навколо нього кола.

199. Радіус кола, описаного навколо правильного многокутника, дорівнює 8 см, а радіус кола, вписаного в нього, — $4\sqrt{3}$ см. Знайти сторону многокутника та кількість його сторін.

200. Чи існує правильний многокутник, у якого відношення радіуса вписаного кола до радіуса описаного кола дорівнює 0,6?

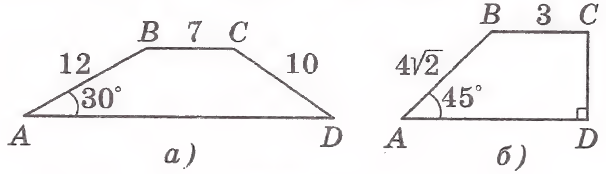
201. Сторона правильного трикутника, вписаного в коло, дорівнює $\sqrt{6}$ см. Знайти сторону квадрата, вписаного в це коло.

320. Площа трапеції дорівнює 98 см^2, одна з її основ дорівнює 12 см, а висота — 7 см. Знайти другу основу трапеції.

321. Площа трапеції дорівнює 50 см^2, а її висота — 5 см. Знайти основи трапеції, якщо вони відносяться як 1:4.

322. Знайти площу трапеції, основи якої дорівнюють 7 см і 9 см, а бічна сторона довжиною 6 см утворює з більшою основою кут 45°.

323. Знайти площу трапеції $ABCD$ (мал. 112).



Мал. 112

324. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 30 см і 40 см, а діагональ — 37 см. Знайти площу трапеції.

325. Знайти площу рівнобічної трапеції, менша основа якої дорівнює 7 см, бічна сторона — 10 см, а кут при більшій основі — 60°.

326. Знайти площу рівнобічної трапеції, діагоналі якої перпендикулярні, а основи дорівнюють 12 см і 20 см.

327. Знайти площу рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 4 см і 10 см, а діагоналі є бісектрисами її тупих кутів.

328. Різниця основ прямокутної трапеції дорівнює 6 см, а менша основа — 12 см. Знайти площу трапеції, якщо менша діагональ є бісектрисою прямого кута.

329. Знайти площу прямокутної трапеції, більша основа якої дорівнює 24 см, менша бічна сторона — 10 см, а тупий кут — 135°.

330. Бічні сторони прямокутної трапеції дорівнюють 17 см і 8 см. Основи трапеції відносяться як 2:5. Знайти площу трапеції.

331. Висота рівнобічної трапеції дорівнює $7\sqrt{3}$ см. Знайти площу трапеції, якщо кут між діагоналями дорівнює 120°.

332. Знайти площу рівнобічної трапеції, діагоналі якої взаємно перпендикулярні, а висота дорівнює 10 см.

333. Знайти площу трапеції, основи якої дорівнюють 8 см і 18 см, а кути при більшій основі — 30° і 60°.

305. Через вершину трикутника провести пряму так, щоб вона поділила його площу у відношенні: 1) 4:1; 2) 3:4.

306. Через вершину паралелограма провести пряму так, щоб вона поділила його площу у відношенні 1:4.

307. Побудувати рівнобедрений трикутник, площа якого відноситься до площі даного трикутника як $1 : \sqrt{3}$, а бічна сторона дорівнює одній із сторін даного трикутника.

308. Знайти площу ромба, діагоналі якого дорівнюють 12 см і 7 см.

309. Знайти площу ромба, якщо його сторона дорівнює 20 см, а різниця діагоналей — 8 см.

310. Знайти площу ромба, якщо його діагоналі відносяться як 12:35, а сторона дорівнює 74 см.

311. Перпендикуляр, проведений з точки перетину діагоналей ромба до сторони, ділить її на відрізки довжиною 16 см і 25 см. Знайти площу ромба.

312. Кут між діагоналями прямокутника дорівнює 30°, а його площа — 20 см^2. Знайти сторони прямокутника.

313. На сторонах AB і AD квадрата $ABCD$ взято точки K і M такі, що трикутник CKM — рівносторонній. Знайти площу квадрата, якщо сторона трикутника дорівнює 1.

314. Знайти площу трикутника, сторони якого дорівнюють 3 см, 7 см і 8 см.

315. Бісектриса кута трикутника ділить протилежну сторону на відрізки довжиною 6 см і 10 см. Знайти площу трикутника, якщо більша з двох інших сторін дорівнює 25 см.

316. Знайти найбільшу висоту трикутника, сторони якого дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см.

317. Три кола, радіуси яких дорівнюють 6 см, 2 см і 1 см, попарно дотикаються одне одного. Визначити площу трикутника, вершини якого лежать у центрах цих кіл.

318. У трикутник зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см вписано коло і центр кола з'єднано з вершинами трикутника. Знайти площі трьох отриманих трикутників.

Площа трапеції

319. Знайти площу трапеції, основи якої дорівнюють 10 см і 14 см, а висота — 5 см.

202. Знайти радіуси кіл, вписаного у правильний трикутник та описаного навколо нього, якщо їх різниця дорівнює 8 см.

203. В коло вписано та навколо нього описано правильні шестикутники. Знайти відношення сторін цих шестикутників.

204. В коло радіуса R вписано правильний трикутник, у цей трикутник вписано коло, а в коло — квадрат. Знайти сторону квадрата.

205. Навколо квадрата зі стороною 6 см описано коло, а навколо кола описано правильний шестикутник, навколо якого описано коло. Знайти радіус цього кола.

206. В коло радіусом $\sqrt{3}$ см вписано правильний трикутник. На його висоті як на стороні побудовано другий правильний трикутник і в нього вписано коло. Знайти радіус цього кола.

207. Середини сторін правильного дванадцятикутника з'єднано через одну так, що отриманою фігурою є правильний шестикутник. Знайти сторону шестикутника, якщо сторона дванадцятикутника дорівнює 2 см.

208. Сторона правильного восьмикутника $ABCDEFKP$ дорівнює 6 см. Знайти довжини діагоналей AC, AD і AE.

209. Спільна хорда двох кіл, що перетинаються, служить для одного з кіл стороною правильного вписаного трикутника, а для другого — стороною вписаного квадрата. Знайти відстань між центрами кіл, якщо вони лежать по різні боки від хорди, а довжина хорди дорівнює 6 см.

210. В правильний трикутник зі стороною a вписано коло. Три маленьких кола дотикаються цього кола та двох сторін трикутника. Знайти радіуси маленьких кіл.

211. Кути квадрата зрізали так, що отримали правильний восьмикутник зі стороною $2\sqrt{2}$ см. Знайти сторону квадрата.

212. В даний ромб вписати квадрат так, щоб сторони квадрата були паралельними діагоналям ромба.

213. Правильний трикутник зі стороною 6 см повернуто на кут 60° відносно його центра. Знайти периметр шестикутника, що утворився.

214. Навколо правильного чотирикутника із стороною a описано коло. Довести, що сума квадратів відстаней від довільної точки кола до вершин чотирикутника є величиною сталою. Знайти її.

Довжина кола та його частин

215. Знайти довжину кола, радіус якого дорівнює: 1) 1 см; 2) 4 см; 3) π см; 4) $\frac{6}{\pi}$ см.

216. Знайти довжину кола, діаметр якого на 8 см довший за радіус.

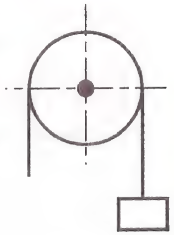
217. Чому дорівнює радіус кола, довжина якого дорівнює: 1) 2 см; 2) 5 см; 3) π см; 4) $4\pi^2$ см?

218. Як побудувати коло, довжина якого дорівнює сумі довжин трьох даних кіл?

219. Радіус кола збільшили: 1) у 2 рази; 2) на 2 см. Як при цьому змінилась довжина кола?

220. На діаметрі AB кола взяли довільну точку M і на відрізках AM і MB як на діаметрах побудували кола. Порівняти довжину кола з діаметром AB з сумою довжин кіл, побудованих на відрізках AM і MB.

221. Вантаж піднімається за допомогою блока (мал. 22). На скільки підніметься вантаж за шість обертів блока, якщо радіус блока дорівнює 6 см?



Мал. 22

222. Діаметр ведучого колеса електровоза дорівнює 2 м. Знайти швидкість електровоза, якщо ведуче колесо за одну хвилину робить 100 обертів.

223. Побудувати графік залежності довжини кола від його радіуса.

224. Радіус кола дорівнює 6 см. Знайти довжину дуги, що містить: 1) 1°; 2) 15°; 3) 120°; 4) 270°; 5) 330°.

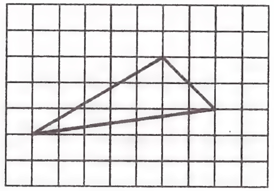
225. Довжина дуги кола дорівнює 15 см, а її градусна міра — 18°. Знайти радіус кола.

226. Довжина дуги кола радіусом 30 см дорівнює 2π см. Знайти градусну міру дуги.

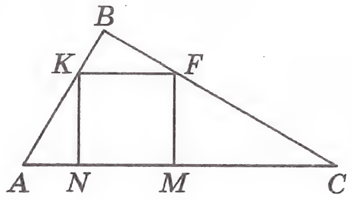
227. Накреслити у зошиті коло радіусом 6 см. Відкласти на ньому дугу довжиною 4π см.

298. Знайти площу трикутника, зображеного на мал. 108.

299. В прямокутний трикутник ABC ($\angle B = 90°$) вписано квадрат (мал. 109). Знайти його площу, якщо $AB = 12$ см, $BC = 16$ см.



Мал. 108



Мал. 109

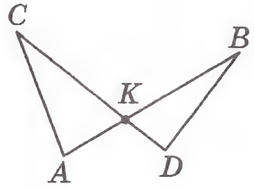
300. Площа трикутника ABC дорівнює 42 см^2. Точка K ділить сторону AC у відношенні 2:5, рахуючи від точки A. Знайти площі трикутників ABK і KBC.

301. У трикутнику ABC $AC = 10$ см, $CB = 7$ см. У якому відношенні ділить площу трикутника ABC бісектриса кута C?

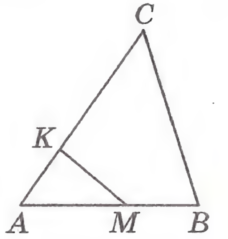
302. Відрізки AB і CD перетинаються в точці K (мал. 110), $AK = \frac{1}{2} KB$, $CK = 3KD$. Знайти відношення площ трикутників AKC і BKD.

303. На сторонах AB і AC кута BAC відкладено відрізки $AM = 6$ см, $AB = 10$ см, $AK = 3$ см, $AC = 12$ см (мал. 111). Знайти відношення площ трикутників AMK і ABC.

304. На сторонах AB і AD паралелограма $ABCD$ взято точки E і K відповідно так, що $AE : EB = 4 : 1$, $AK : KD = 2 : 5$. Площа трикутника EAK дорівнює 4 см^2. Знайти площу паралелограма.



Мал. 110



Мал. 111

287. У чотирикутнику $ABCD$ O — точка перетину його діагоналей. Відомо, що площі трикутників AOB і COD рівні. Довести, що $BC \parallel AD$.

288. Висота рівнобедреного трикутника, проведена до бічної сторони, ділить її на відрізки довжиною 2 см і 8 см, рахуючи від вершини кута при основі. Знайти площу трикутника.

289. Висота, проведена до основи рівнобедреного трикутника, дорівнює 48 см. Знайти площу трикутника, якщо відношення бічної сторони до основи дорівнює 25:14.

290. Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 120°, а його площа — $20\sqrt{3}$ см^2. Знайти сторони трикутника.

291. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 16 см, а синус кута, що лежить проти нього, дорівнює 0,6. Знайти площу трикутника.

292. Знайти площу прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює 37 см, а сума катетів — 47 см.

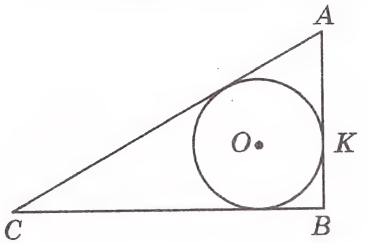
293. Знайти площу прямокутного трикутника, якщо висота, проведена до гіпотенузи, ділить її на відрізки довжиною 9 см і 16 см.

294. Знайти площу прямокутного трикутника, якщо бісектриса прямого кута ділить гіпотенузу на відрізки довжиною 15 см і 20 см.

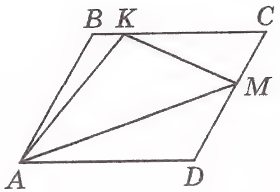
295. Знайти площу прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює 35 см, а радіус вписаного кола — 7 см.

296. В прямокутний трикутник ABC ($\angle B = 90°$) вписано коло з центром O (мал. 106), K — точка дотику кола зі стороною AB, $BK = 4\sqrt{3}$ см, $\angle C = 30°$. Знайти площу трикутника ABC.

297. В ромб $ABCD$ вписано трикутник AKM (мал. 107), $AB = 10$ см, $BK = 2$ см, $DM = 6$ см, $\angle BCD = 60°$. Знайти площу трикутника AKM.



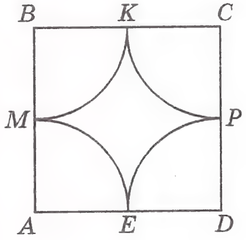
Мал. 106



Мал. 107

228. Довжина кола радіусом 10 см дорівнює довжині дуги другого кола, яка містить 150°. Знайти радіус другого кола.

229. $ABCD$ — квадрат зі стороною a, KM, ME, EP і PK — дуги з центрами B, A, D і C відповідно і радіусами, рівними $\frac{a}{2}$ (мал. 23). Знайти периметр фігури $KPEM$.



Мал. 23

230. На катеті BC прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) як на діаметрі побудовано коло. Знайти довжину дуги цього кола, яка міститься поза трикутником і відтинається гіпотенузою AB, якщо $\angle B = 36°$, $BC = 6$ см.

231. У трикутнику ABC $AB = 8$ см, $\angle A = 45°$, $\angle B = 60°$. Знайти довжину дуги кола з центром у вершині A, яке дотикається до сторони BC і міститься всередині трикутника.

232. В коло радіусом $R = 1$ вписано правильний дванадцятикутник, а навколо кола описано квадрат. Зробити малюнок і, користуючись ним, довести, що $3 < \pi < 4$.

Радіанна міра кута

233. Знайти радіанну міру кутів: 15°; 30°; 48°; 75°; 120°; 240°.

234. Знайти градусну міру кута, радіанна міра якого дорівнює: $\frac{\pi}{20}$; $\frac{\pi}{12}$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{22}$; $\frac{4}{5}\pi$; $1\frac{2}{3}\pi$; 3π.

235. Радіус кола дорівнює одиниці. Знайти довжину дуги кола, що відповідає куту у 3 радіани.

236. Чи можуть усі кути трикутника дорівнювати цілому числу радіан?

Площа квадрата. Площа прямокутника

237. Знайти площу квадрата, сторона якого дорівнює: 1) 12 см; 2) 3,5 см; 3) m см.

238. Знайти площу квадрата, діагональ якого дорівнює: 1) 4 см; 2) $5\sqrt{2}$ см; 3) m см.

239. Знайти площу прямокутника, сторони якого дорівнюють: 1) 12 см і 8 см; 2) 0,8 см і 3,4 см.

240. Знайти сторону квадрата, якщо його площа дорівнює: 1) 196 $см^2$; 2) 7,29 $см^2$; 3) 18 $м^2$; 4) m $см^2$.

241. Одна із сторін прямокутника дорівнює 12 см, а його площа — 168 $см^2$. Знайти другу сторону прямокутника.

242. Сторона прямокутника дорівнює 8 см і утворює з діагоналлю кут 30°. Знайти площу прямокутника.

243. Знайти сторони прямокутника, якщо вони відносяться як 4:7, а площа прямокутника — 112 $см^2$.

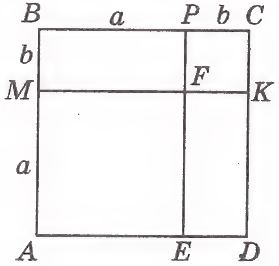
244. Площа прямокутника дорівнює 21 $см^2$. Знайти сторони прямокутника, якщо одна з них на 4 см більша за другу.

245. Квадрат і прямокутник мають рівні площі. Сторона квадрата дорівнює 8 см, а одна із сторін прямокутника 16 см. Знайти другу сторону прямокутника.

246. Знайти площу квадрата, якщо радіус кола, описаного навколо нього, дорівнює R.

247. Площа квадрата чисельно дорівнює його периметру. Знайти сторону квадрата.

248. $ABCD$ — квадрат (мал. 24). Відрізки MK і PE паралельні його сторонам. Користуючись малюнком, довести формулу $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.



Мал. 24

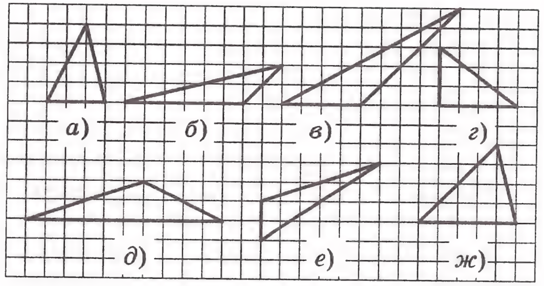
249. Чи можуть два нерівні квадрати мати рівні площі?

250. Як зміниться площа квадрата, якщо його сторону:
1) збільшити у 7 разів; 3) збільшити у m разів?
2) зменшити у 4 рази;

251. Як зміниться площа квадрата, якщо його діагональ збільшити у 4 рази? Як зміниться при цьому периметр квадрата?

252. Як зміниться площа прямокутника, якщо:
1) одну з його сторін збільшити у 3 рази;
2) одну з його сторін зменшити у 5 разів;
3) обидві сторони збільшити у 7 разів;
4) одну сторону збільшити у 4 рази, а другу — у 6 разів;

277. За мал. 105 вказати трикутники, які мають рівні площі.



Мал. 105

278. Знайти площу трикутника, дві сторони якого дорівнюють 6 см і 5 см, а кут між ними: 1) 60°; 2) 135°.

279. Дві сторони трикутника дорівнюють 5 см і 12 см. Чи може його площа дорівнювати: 1) 24 $см^2$; 2) 30 $см^2$; 3) 42 $см^2$?

280. Основа трикутника 10 см, а висота, проведена до неї, — 4 см. Якою повинна бути висота другого трикутника з основою 8 см, щоб його площа була у 2 рази меншою за площу першого трикутника?

281. Знайти площу рівнобедреного трикутника, основа якого дорівнює 16 см, а бічна сторона — 10 см.

282. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 8 см і 15 см. Знайти висоту трикутника, проведену до гіпотенузи.

283. Як зміниться площа трикутника, якщо:
1) його висоту зменшити у 2 рази;
2) його основу збільшити у 4 рази;
3) висоту зменшити у 6 разів, а основу збільшити у 4 рази;
4) основу зменшити у 3 рази, а висоту — у 9 разів?

284. У трикутнику ABC $AC : CB = 2 : 5$. Знайти відношення висот трикутника, проведених з вершин A і B.

285. Довести, що меншій стороні трикутника відповідає більша висота.

286. Довести, що медіани трикутника ділять його на шість рівновеликих трикутників.

261. Знайти площу паралелограма, сторони якого дорівнюють 8 см і 14 см, а кут між ними — 45°.

262. Знайти площу ромба, сторона якого дорівнює $7\sqrt{2}$ см, а один з кутів — 135°.

263. Серед усіх паралелограмів з заданими висотами вказати паралелограм найбільшої площі.

264. Кути ромба відносяться як 2:1, а його сторона дорівнює 6 см. Знайти площу ромба.

265. Площа паралелограма дорівнює 56 $см^2$. Знайти відстань між сторонами паралелограма, довжини яких 8 см.

266. Одна із сторін паралелограма дорівнює 5 см, а висота, проведена до другої сторони, — 4 см. Знайти невідомі сторони і висоту паралелограма, якщо його площа дорівнює 40 $см^2$.

267. Сторони паралелограма дорівнюють 8 см і 10 см, а одна з висот — 6 см. Знайти другу висоту паралелограма. Скільки розв'язків має задача?

268. Площа паралелограма дорівнює 45 $см^2$, а його висота на 4 см менша від сторони, до якої її проведено. Знайти цю сторону паралелограма та висоту, проведену до неї.

269. Прямокутник і паралелограм мають відповідно рівні сторони, а відношення їх площ дорівнює 2. Знайти кути паралелограма.

270. Сторони паралелограма дорівнюють 7 см і 9 см. Чи може його площа дорівнювати 64 $см^2$?

271. Висоти паралелограма дорівнюють 14 см і 12 см, а кут між ними — 45°. Знайти площу паралелограма.

272. Знайти площу паралелограма, сторони якого дорівнюють 25 см і 7 см, а одна з діагоналей перпендикулярна до сторони.

273. Довести, що пряма, яка ділить паралелограм на дві рівні частини, проходить через його центр симетрії.

Площа трикутника

274. Сторона трикутника дорівнює 10 см, а висота, проведена до неї, — 3,5 см. Знайти площу трикутника.

275. Площа трикутника дорівнює 92 $см^2$. Знайти висоту трикутника, проведену до сторони довжиною 4 см.

276. Знайти площу прямокутного трикутника, катети якого дорівнюють 5 см і 11 см.

5) одну сторону збільшити у 8 разів, а другу зменшити у 2 рази;

6) одну сторону збільшити у k разів, а другу — у p разів;

7) одну сторону збільшити у m разів, а другу зменшити у n разів?

253. Відношення площ двох квадратів дорівнює 3. Знайти відношення їх периметрів.

254. Побудувати квадрат, площа якого дорівнює сумі площ двох даних квадратів.

255. Побудувати квадрат, площа якого у 3 рази більша за площу даного квадрата.

256. Сторони прямокутника дорівнюють a і b. Побудувати квадрат, площа якого дорівнює площі даного прямокутника.

257. Як розрізати на частини два маленькі рівні квадрати, щоб з них можна було скласти один великий квадрат?

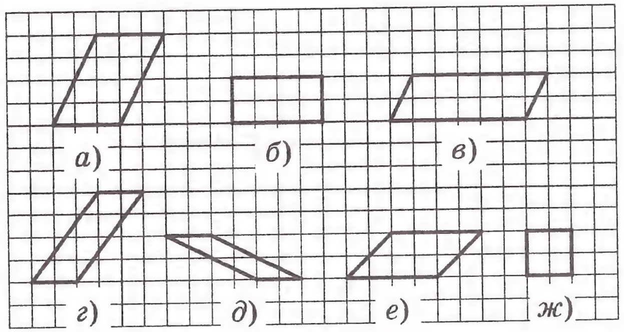
258. Сторона правильного трикутника, вписаного в коло, дорівнює 3 см. Знайти площу квадрата, вписаного в це коло.

Площа паралелограма. Площа ромба

259. Знайти площу паралелограма, сторона якого дорівнює 18 см, а висота, проведена до неї, — 7 см.

260. На мал. 25 вказати паралелограми, які мають рівні площі.

261. Знайти площу паралелограма, сторони якого дорівнюють 9 см і 12 см, а кут між ними — 60°.



Мал. 25

262. Знайти площу ромба, сторона якого дорівнює $5\sqrt{3}$ см, а один з кутів — 120°.

263. Серед усіх ромбів з заданою стороною вказати ромб найбільшої площі.

264. Кути ромба відносяться як 1:3, а його сторона дорівнює 8 см. Знайти площу ромба.

265. Площа паралелограма дорівнює 48 $см^2$. Знайти відстань між сторонами паралелограма, довжини яких 6 см.

266. Одна із сторін паралелограма дорівнює 4 см, а висота, проведена до другої сторони, — 8 см. Знайти невідомі сторону і висоту паралелограма, якщо його площа дорівнює 96 $см^2$.

267. Сторони паралелограма дорівнюють 9 см і 12 см, а одна з висот — 4 см. Знайти другу висоту паралелограма. Скільки розв'язків має задача?

268. Площа паралелограма дорівнює 54 $см^2$, а його висота на 3 см більша за сторону, до якої її проведено. Знайти цю сторону паралелограма та висоту, проведену до неї.

269. Прямокутник і паралелограм мають відповідно рівні сторони, а відношення їх площ дорівнює $\sqrt{2}$. Знайти кути паралелограма.

270. Сторони паралелограма дорівнюють 6 см і 8 см. Чи може його площа дорівнювати 49 $см^2$?

271. Висоти паралелограма дорівнюють 8 см і 10 см, а кут між ними — 60°. Знайти площу паралелограма.

272. Знайти площу паралелограма, сторони якого дорівнюють 9 см і 15 см, а одна з діагоналей перпендикулярна до сторони.

273. Довести, що пряма, яка проходить через центр симетрії паралелограма, поділяє його на дві частини рівної площі.

Площа трикутника

274. Сторона трикутника дорівнює 8 см, а висота, проведена до неї, — 4,5 см. Знайти площу трикутника.

275. Площа трикутника дорівнює 84 $см^2$. Знайти висоту трикутника, проведену до сторони довжиною 8 см.

276. Знайти площу прямокутного трикутника, катети якого дорівнюють 6 см і 9 см.

4) одну сторону збільшити у 3 рази, а другу — у 5 разів;
5) одну сторону зменшити у 9 разів, а другу — у 2 рази;
6) одну сторону збільшити у a разів, а другу — у b разів;
7) одну сторону збільшити у t разів, а другу зменшити у l разів?

253. Відношення площ двох квадратів дорівнює 5. Знайти відношення їх периметрів.

254. Побудувати квадрат, площа якого дорівнює різниці площ двох даних квадратів.

255. Побудувати квадрат, площа якого у 5 разів більша за площу даного квадрата.

256. Сторони двох квадратів дорівнюють відповідно a і b. Побудувати квадрат, площа якого дорівнює ab.

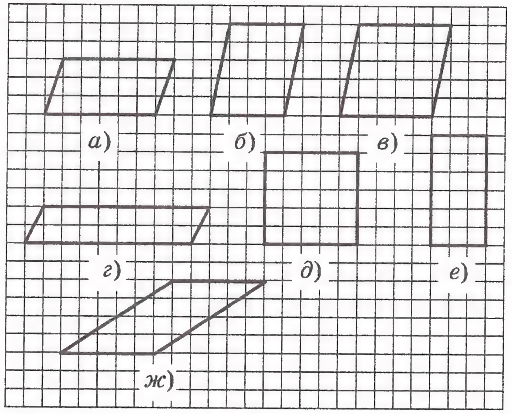
257. Як розрізати квадрат на три рівновеликих прямокутника, не всі з яких рівні?

258. Площа квадрата, вписаного в коло, дорівнює 5 $см^2$. Знайти сторону правильного трикутника, вписаного в це коло.

Площа паралелограма. Площа ромба

259. Знайти площу паралелограма, сторона якого дорівнює 14 см, а висота, проведена до неї, — 8 см.

260. На мал. 104 вказати паралелограми, які мають рівні площі.



Мал. 104

239. Знайти площу прямокутника, сторони якого дорівнюють: 1) 5 см і 15 см; 2) 0,3 см і 4,2 см.

240. Знайти сторону квадрата, якщо його площа дорівнює: 1) 225 $см^2$; 2) 6,76 $см^2$; 3) 24 $м^2$; 4) a $см^2$.

241. Одна із сторін прямокутника дорівнює 14 см, а його площа — 210 $см^2$. Знайти другу сторону прямокутника.

242. Сторона прямокутника дорівнює 10 см і утворює з діагоналлю кут 60°. Знайти площу прямокутника.

243. Знайти сторони прямокутника, якщо вони відносяться як 3 : 8, а площа прямокутника дорівнює 96 $см^2$.

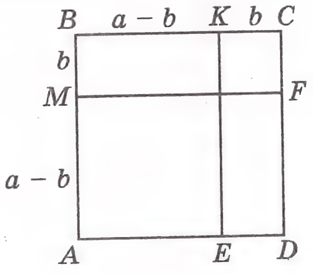
244. Площа прямокутника дорівнює 88 $см^2$. Знайти сторони прямокутника, якщо одна з них на 3 см менша від другої.

245. Квадрат і прямокутник мають рівні площі. Сторона квадрата дорівнює 12 см, а сторони прямокутника відносяться як 4:9. Знайти сторони прямокутника.

246. Знайти радіус кола, описаного навколо квадрата, якщо площа квадрата дорівнює S $см^2$.

247. Площа квадрата чисельно дорівнює його діагоналі. Знайти сторону квадрата.

248. $ABCD$ — квадрат (мал. 103). Відрізки MF і KE паралельні його сторонам. Користуючись малюнком, довести формулу $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$.



Мал. 103

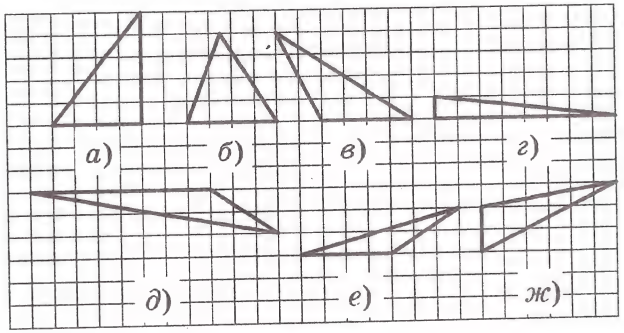
249. Чи можуть два нерівні прямокутники мати рівні площі?

250. Як зміниться площа квадрата, якщо його сторону:
1) збільшити у 5 разів;
2) зменшити у 3 рази;
3) зменшити у a разів?

251. Як зміниться площа квадрата, якщо його діагональ зменшити у 2 рази? Як зміниться при цьому периметр квадрата?

252. Як зміниться площа прямокутника, якщо:
1) одну з його сторін збільшити у 4 рази;
2) одну з його сторін зменшити у 6 разів;
3) обидві сторони зменшити у 3 рази;

277. За мал. 26 вказати трикутники, які мають рівні площі.



Мал. 26

278. Знайти площу трикутника, дві сторони якого дорівнюють 4 см і 7 см, а кут між ними: 1) 30°; 2) 120°.

279. Дві сторони трикутника дорівнюють 4 см і 8 см. Чи може його площа дорівнювати: 1) 12 $см^2$; 2) 16 $см^2$; 3) 18 $см^2$?

280. Основа трикутника 8 см, а висота, проведена до неї, — 3 см. Якою повинна бути висота другого трикутника з основою 6 см, щоб його площа була у 3 рази більша за площу першого трикутника?

281. Знайти площу рівнобедреного трикутника, основа якого дорівнює 6 см, а бічна сторона — 5 см.

282. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 9 см і 12 см. Знайти висоту трикутника, проведену до гіпотенузи.

283. Як зміниться площа трикутника, якщо:
1) його висоту збільшити у 3 рази;
2) його основу зменшити у 5 разів;
3) висоту збільшити у 5 разів, а основу зменшити у 2 рази;
4) основу збільшити у 7 разів, а висоту — у 8 разів?

284. У трикутнику ABC $AB : BC = 2 : 3$. Знайти відношення висот трикутника, проведених з вершин C і A.

285. Довести, що більшій стороні трикутника відповідає менша висота.

286. Довести, що медіана трикутника ділить його на два трикутника рівної площі.

287. O — точка перетину діагоналей трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Довести, що площі трикутників AOB і COD рівні.

288. Висота рівнобедреного трикутника, проведена до бічної сторони, ділить її на відрізки довжиною 8 см і 5 см, рахуючи від вершини кута при основі. Знайти площу трикутника.

289. Висота, проведена до основи рівнобедреного трикутника, дорівнює 12 см. Знайти площу трикутника, якщо відношення бічної сторони до основи дорівнює $\frac{5}{6}$.

290. Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 30°, а його площа — 150 см^2. Знайти сторони трикутника.

291. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 12 см, а синус кута, що лежить проти нього, дорівнює 0,8. Знайти площу трикутника.

292. Знайти площу прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює 26 см, а різниця катетів — 14 см.

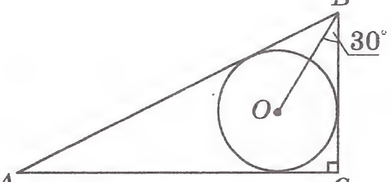
293. Знайти площу прямокутного трикутника, якщо висота, проведена до гіпотенузи, ділить її на відрізки довжиною 6 см і 24 см.

294. Знайти площу прямокутного трикутника, якщо бісектриса прямого кута ділить гіпотенузу на відрізки довжиною 30 см і 40 см.

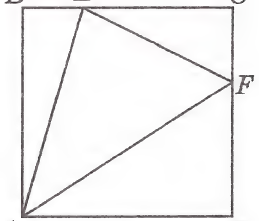
295. Знайти площу прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює 26 см, а радіус вписаного кола — 4 см.

296. В прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90^\circ$) вписано коло з центром O і радіусом $\sqrt{3}$ см (мал. 27). Знайти площу трикутника, якщо $\angle OBC = 30^\circ$.

297. Сторона квадрата $ABCD$ дорівнює 14 см. На сторонах BC і CD взято такі точки E і F відповідно, що $BE = 4$ см, $DF = 9$ см. Знайти площу трикутника AEF (мал. 28).



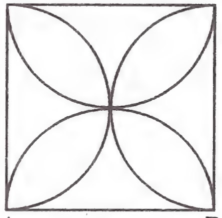
Мал. 27



Мал. 28

228. Довжина кола радіусом 12 см дорівнює довжині дуги другого кола, яка містить 135°. Знайти радіус другого кола.

229. $ABCD$ — квадрат зі стороною a. На його сторонах як на діаметрах побудовані півкола (мал. 102). Знайти периметр отриманої «квітки».



Мал. 102

230. На катеті AC прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$) як на діаметрі побудовано коло. Знайти довжину дуги цього кола, яка міститься всередині трикутника і відтинається гіпотенузою AB, якщо $\angle A = 40^\circ$, $AC = 10$ см.

231. У трикутнику ABC $AB = 6$ см, $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 45^\circ$. Знайти довжину дуги кола з центром у вершині B, яке дотикається сторони AC і міститься всередині трикутника.

232. В коло радіусом $R = 1$ вписано правильний дванадцятикутник і навколо цього кола описано правильний шестикутник. Зробити малюнок і, користуючись ним, довести, що $3 < \pi < 3{,}5$.

Радіанна міра кута

233. Знайти радіанну міру кутів: 10°; 20°; 54°; 60°; 125°; 270°.

234. Знайти градусну міру кута, радіанна міра якого дорівнює: $\frac{\pi}{15}$; $\frac{\pi}{10}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{4}$; $\frac{9\pi}{2}$.

235. Радіус кола дорівнює одиниці. Знайти довжину дуги кола, що відповідає куту у 6 радіан.

236. Чи можуть усі кути чотирикутника дорівнювати цілому числу радіан?

Площа квадрата. Площа прямокутника

237. Знайти площу квадрата, сторона якого дорівнює: 1) 14 см; 2) 2,5 см; 3) a см.

238. Знайти площу квадрата, діагональ якого дорівнює: 1) 6 см; 2) $6\sqrt{2}$ см; 3) $\sqrt{a}$ см.

213. Квадрат зі стороною 6 см повернули навколо його центра на кут 45°. Знайти периметр восьмикутника, що утворився.

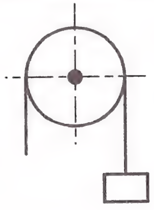
214. Навколо правильного трикутника описано коло. Довести, що сума квадратів відстаней від довільної точки кола до вершин трикутника є величиною сталою.

Довжина кола та його частин

215. Знайти довжину кола, радіус якого дорівнює: 1) 3 см; 2) 8 см; 3) $\sqrt{\pi}$ см; 4) $\frac{5}{\pi}$ см.

216. Знайти довжину кола, діаметр якого на 3 см довший за радіус.

217. Чому дорівнює радіус кола, довжина якого дорівнює: 1) 4 см; 2) 6 см; 3) π^2 см; 4) $\frac{2}{\pi}$ см?



Мал. 101

218. Як побудувати коло, довжина якого дорівнює різниці суми довжин двох даних кіл і довжини третього даного кола?

219. Радіус кола зменшили: 1) у 3 рази; 2) на 1 см. Як при цьому змінилась довжина кола?

220. Відрізок $AB = 10$ см розділили на декілька відрізків (не обов'язково рівних). На кожному з отриманих відрізків як на діаметрі побудували кола. Знайти суму довжин отриманих кіл.

221. Вантаж підіймається за допомогою блока (мал. 101). На скільки підніметься вантаж за 8 обертів блока, якщо радіус блока дорівнює 5 см?

222. Діаметр колеса автомобіля дорівнює 0,9 м. Знайти його швидкість, якщо колесо за одну хвилину робить 250 обертів.

223. Побудувати графік залежності діаметра кола від його довжини.

224. Радіус кола дорівнює 8 см. Знайти довжину дуги, що містить: 1) 2°; 2) 20°; 3) 125°; 4) 240°; 5) 315°.

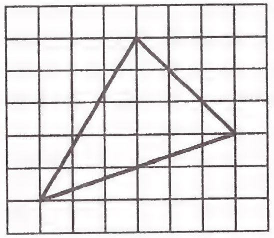
225. Довжина дуги кола дорівнює 20 см, а її градусна міра — 15°. Знайти радіус кола.

226. Довжина дуги кола радіусом 40 см дорівнює π см. Знайти градусну міру дуги.

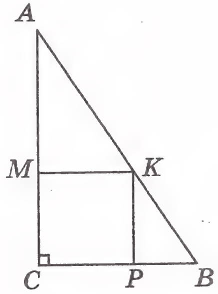
227. Накреслити у зошиті коло радіусом 4 см. Відкласти на ньому дугу довжиною 3π см.

298. Знайти площу трикутника, зображеного на мал. 29.

299. В прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90°$) вписано квадрат $MKPC$ (мал. 30). Знайти його площу, якщо $AC = 6$ см, $BC = 4$ см.



Мал. 29



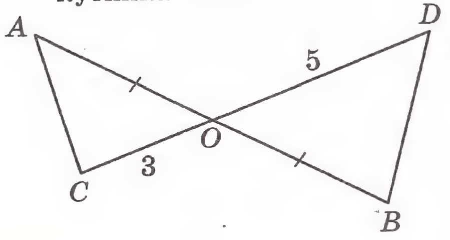
Мал. 30

300. Площа трикутника ABC дорівнює 28 см². Точка D ділить сторону BC у відношенні 3:1, рахуючи від точки B. Знайти площі трикутників ABD і ACD.

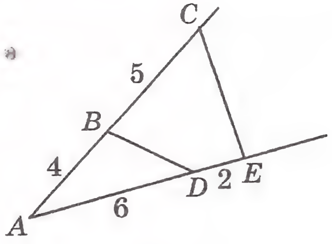
301. У трикутнику ABC $AB = 14$ см, $BC = 8$ см. У якому відношенні ділить площу трикутника ABC бісектриса кута B?

302. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O (мал. 31), $AO = OB$, $CO = 3$ см, $OD = 5$ см. Знайти відношення площ трикутників AOC і DOB.

303. На сторонах AC і AE кута A відкладено відрізки $AB = 4$ см, $BC = 5$ см, $AD = 6$ см, $DE = 2$ см (мал. 32). Знайти відношення площ трикутника ABD і чотирикутника $BCED$.



Мал. 31



Мал. 32

304. На сторонах BC і CD квадрата $ABCD$ взято точки M і K відповідно так, що $BM : MC = 3 : 1$, $CK : KD = 1 : 2$. Площа трикутника MCK дорівнює 6 см². Знайти площу квадрата $ABCD$.

305. Через вершину трикутника провести пряму так, щоб вона поділила його площу у відношенні: 1) 2:1; 2) 2:3.

306. Через вершину паралелограма провести пряму так, щоб вона поділила його площу у відношенні 2:3.

307. Побудувати рівнобедрений трикутник, рівновеликий даному трикутнику, так, щоб бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнювала одній із сторін даного трикутника.

308. Знайти площу ромба, діагоналі якого дорівнюють 8 см і 5 см.

309. Знайти площу ромба, якщо його сторона дорівнює 15 см, а сума діагоналей — 42 см.

310. Знайти площу ромба, якщо його діагоналі відносяться як 5:12, а висота дорівнює 60 см.

311. Перпендикуляр, проведений з точки перетину діагоналей ромба до сторони, ділить її на відрізки довжиною 4 см і 9 см. Знайти площу ромба.

312. Кут між діагоналями прямокутника дорівнює 60°, а його площа — 12 $см^2$. Знайти сторони прямокутника.

313. Сторона квадрата $ABCD$ дорівнює 1. На сторонах AB і BC взято такі точки E і F, що трикутник DEF — рівносторонній. Знайти його площу.

314. Знайти площу трикутника, сторони якого дорівнюють 26 см, 28 см і 30 см.

315. Бісектриса кута трикутника ділить протилежну сторону на відрізки довжиною 5 см і 6 см. Знайти площу трикутника, якщо менша з двох інших сторін дорівнює 15 см.

316. Знайти найменшу висоту трикутника, сторони якого дорівнюють 7 см, 8 см і 9 см.

317. Три кола, радіуси яких дорівнюють 12 см, 14 см і 16 см, попарно дотикаються одне одного. Визначити площу трикутника, вершини якого лежать у центрах цих кіл.

318. У трикутник зі сторонами 26 см, 15 см і 37 см вписано коло і центр кола з'єднано з вершинами трикутника. Знайти площі отриманих трьох трикутників.

Площа трапеції

319. Знайти площу трапеції, основи якої дорівнюють 8 см і 11 см, а висота — 4 см.

320. Площа трапеції дорівнює 168 $см^2$, одна з її основ — 15 см, а висота — 9 см. Знайти другу основу трапеції.

201. Сторона квадрата, вписаного в коло, дорівнює 4 см. Знайти сторону правильного трикутника, вписаного в це коло.

202. Знайти радіуси кіл, вписаного у правильний трикутник та описаного навколо нього, якщо їх сума дорівнює 12 см.

203. В коло вписано та навколо нього описано квадрат. Знайти відношення сторін цих квадратів.

204. Квадрат вписано в коло радіуса R. В цей квадрат вписано інше коло, в яке вписано правильний трикутник. Знайти сторону цього трикутника.

205. Навколо правильного трикутника зі стороною $2\sqrt{3}$ см описано коло, а навколо кола описано правильний шестикутник, навколо якого описано коло. Знайти радіус цього кола.

206. Навколо кола радіуса $4\sqrt{3}$ см описано правильний трикутник. На його висоті як на стороні побудовано другий правильний трикутник і в нього вписано коло. Знайти радіус цього кола.

207. Середини сторін правильного восьмикутника з'єднано через одну так, що отриманою фігурою є квадрат. Знайти сторону восьмикутника, якщо сторона квадрата дорівнює 6 см.

208. Радіус кола, вписаного в правильний восьмикутник $ABCDEFKM$, дорівнює 4 см. Знайти довжини діагоналей AC, AD і AE.

209. Довжина спільної хорди двох кіл дорівнює 2 см. Для одного з кіл хорда служить стороною правильного вписаного шестикутника, а для другого — стороною вписаного квадрата. Знайти відстань між центрами кіл, якщо вони лежать по різні боки від хорди.

210. В квадрат зі стороною a вписано коло. Чотири маленьких кола дотикаються цього кола та двох сторін квадрата. Знайти радіуси маленьких кіл.

211. Кути правильного трикутника зрізали так, що отримали правильний шестикутник зі стороною 5 см. Знайти сторону трикутника.

212. В даний правильний трикутник вписати квадрат так, щоб одна із сторін квадрата була паралельна стороні трикутника.

189. На мал. 100 зображено правильний шестикутник, вписаний в коло. Як найпростіше на цьому малюнку побудувати правильний дванадцятикутник?

190. За даною стороною a побудувати правильний п'ятикутник.

191. Описати навколо даного кола правильний дванадцятикутник.

192. AB, BC і CD — три послідовні сторони правильного многокутника. Продовження сторін AB і CD перетинаються в точці M, $\angle BMC = 140^\circ$. Знайти кількість сторін многокутника.

193. Коло вписано в многокутник, усі кути якого рівні. Чи можуть бути нерівними його сторони?

194. Середини сторін многокутника з'єднали послідовними відрізками і отримали правильний многокутник. Чи можна стверджувати, що даний многокутник теж правильний?

195. Чотирикутник має дві осі симетрії. Довести, що він правильний.

Залежність між сторонами та радіусами вписаного та описаного кіл правильного многокутника

196. Сторона правильного трикутника дорівнює 6 см. Знайти радіуси вписаного та описаного навколо нього кіл.

197. Радіус кола, вписаного в квадрат, дорівнює 8 см. Знайти сторону квадрата та радіус описаного навколо нього кола.

198. Радіус кола, описаного навколо правильного шестикутника, дорівнює $5\sqrt{3}$ см. Знайти сторону шестикутника та радіус вписаного в нього кола.

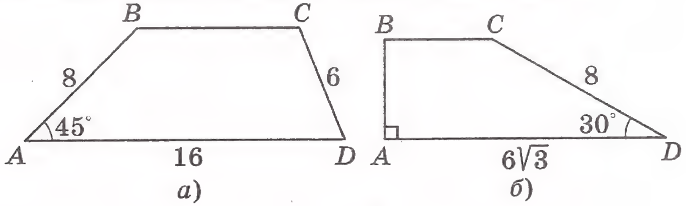
199. Радіус кола, описаного навколо правильного многокутника, дорівнює 12 см, а радіус кола, вписаного в нього, — $6\sqrt{3}$ см. Знайти сторону многокутника та кількість його сторін.

200. Чи існує правильний многокутник, у якого відношення радіуса вписаного кола до радіуса описаного кола дорівнює 0,8?

321. Площа трапеції дорівнює 24 см^2, а її висота — 4 см. Знайти основи трапеції, якщо вони відносяться як 1:5.

322. Знайти площу трапеції, основи якої 6 см і 12 см, а бічна сторона довжиною 8 см утворює з меншою основою кут 120°.

323. Знайти площу трапеції $ABCD$ (мал. 33).



Мал. 33

324. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 9 см і 27 см, а діагональ — 45 см. Знайти площу трапеції.

325. Знайти площу рівнобічної трапеції, більша основа якої дорівнює 9 см, бічна сторона — 8 см, а тупий кут — 135°.

326. Знайти площу рівнобічної трапеції, діагоналі якої перпендикулярні, а основи дорівнюють 14 см і 18 см.

327. Знайти площу рівнобічної трапеції, основи якої 10 см і 12 см, а діагоналі є бісектрисами її гострих кутів.

328. Менша основа прямокутної трапеції дорівнює 28 см, а різниця основ — 9 см. Знайти площу трапеції, якщо її менша діагональ є бісектрисою прямого кута.

329. Знайти площу прямокутної трапеції, більша основа якої дорівнює 14 см, більша бічна сторона — 12 см і гострий кут дорівнює 60°.

330. Різниця основ прямокутної трапеції дорівнює 10 см, а різниця бічних сторін — 2 см. Знайти площу трапеції, якщо її більша діагональ дорівнює 30 см.

331. Периметр рівнобічної трапеції дорівнює 50 см, а гострий кут — 60°. Знайти площу трапеції, якщо її діагональ є бісектрисою гострого кута трапеції.

332. Діагоналі рівнобічної трапеції взаємно перпендикулярні. Знайти площу трапеції, якщо проекція діагоналі на більшу основу дорівнює 6 см.

333. Знайти площу трапеції, основи якої дорівнюють 6 см і 8 см, а кути при більшій основі — 30° і 45°.

334. Площа трапеції дорівнює 56 см^2, а її висота — 4 см. Знайти основи трапеції, якщо їх різниця дорівнює 4 см.

335. Знайти площу трапеції, основи якої дорівнюють 15 см і 29 см, а бічні сторони — 13 см і 15 см.

336. В рівнобічну трапецію вписано коло, яке ділить бічну сторону трапеції на відрізки довжиною 3 см і 12 см. Знайти площу трапеції.

337. Радіус кола, вписаного в рівнобічну трапецію, дорівнює 4 см, а гострий кут трапеції — 30°. Знайти її площу.

338. Довжини бічних сторін трапеції дорівнюють 20 см і 13 см, а різниця основ — 21 см. Знайти площу трапеції, якщо відомо, що в неї можна вписати коло.

339. Периметр трапеції дорівнює 66 см, а точка дотику вписаного кола ділить бічну сторону на відрізки довжиною 4 см і 9 см. Знайти площу трапеції.

340. Більша основа рівнобічної трапеції у 2 рази більша за меншу основу, а діагональ трапеції є бісектрисою її гострого кута. Знайти площу трапеції, якщо радіус кола, описаного навколо неї, дорівнює 2 см.

Площа многокутника

341. Діагоналі чотирикутника дорівнюють 4 см і 8 см, а кут між ними — 30°. Знайти площу чотирикутника.

342. Катет рівнобедреного прямокутного трикутника дорівнює 4 см. На сторонах трикутника зовні побудовано квадрати і їх вершини послідовно з'єднано. Знайти площу утвореного шестикутника.

343. Виразити площу правильного шестикутника через довжину його більшої діагоналі.

344. Обчислити площу правильного дванадцятикутника, вписаного в коло радіусом 4 см.

345. Знайти відношення площ правильних трикутника, чотирикутника та шестикутника, сторони яких рівні.

346. Квадрат зі стороною 1 см зрізано по кутам так, що утворився правильний восьмикутник. Знайти його площу.

347. Сторона правильного трикутника дорівнює 4 см. В трикутник вписано коло, а в коло — правильний шестикутник. Знайти площу шестикутника.

179. Які правильні многокутники мають вісь симетрії і центр симетрії?

180. Знайти величини внутрішніх та зовнішніх кутів правильного n-кутника, якщо n дорівнює: 1) 6; 2) 24; 3) 10.

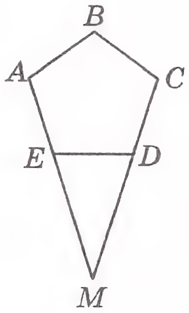
181. Знайти кількість сторін правильного многокутника, якщо: 1) його внутрішній кут дорівнює 164°; 2) його зовнішній кут дорівнює 12°.

182. Визначити кількість сторін правильного многокутника, у якого внутрішній кут вдвічі більший за зовнішній.

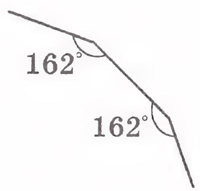
183. Сума внутрішніх кутів правильного многокутника разом з одним із зовнішніх кутів становить 1125°. Знайти кількість сторін многокутника.

184. На мал. 98 зображено правильний п'ятикутник $ABCDE$, M — точка перетину прямих AE і CD. Знайти кут AMC.

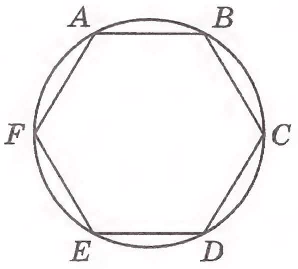
185. На мал. 99 зображено кілька послідовних сторін правильного многокутника. Як визначити загальну кількість його сторін?



Мал. 98



Мал. 99



Мал. 100

186. Знайти величину центрального кута правильного n-кутника, якщо n дорівнює: 1) 5; 2) 8; 3) 40.

187. Центральний кут правильного многокутника дорівнює 20°. Знайти кількість сторін многокутника.

188. Якого найбільшого значення може набувати зовнішній кут правильного многокутника?

165. Довести, що сума двох сторін трикутника більша за подвоєну медіану, проведену до третьої сторони.

166. Довести, що сума двох медіан трикутника більша за його третю медіану.

Сума внутрішніх та зовнішніх куті опуклого многокутника

167. Чи можна побудувати опуклий многокутник, усі кути якого гострі?

168. Чи може найменший кут опуклого семикутника дорівнювати 136°?

169. Як зміниться сума внутрішніх кутів опуклого многокутника, якщо кількість його сторін збільшиться на два?

170. Визначити кути опуклого шестикутника, якщо їх градусні міри відносяться як 3:5:4:7:2:3.

171. Знайти кути опуклого чотирикутника, якщо один з них на 30° більший за другий, третій — на 10° більший за другий, а четвертий дорівнює півсумі першого і третього кутів.

172. Всі кути опуклого n-кутника гострі. Знайти n.

173. Чи може в опуклому чотирикутнику один з кутів бути більшим за суму трьох інших кутів?

174. В опуклому многокутнику сума його внутрішніх кутів дорівнює 2700°. Знайти кількість його сторін та діагоналей.

175. В опуклому многокутнику 152 діагоналі. Знайти кількість його сторін та суму кутів.

176. Сума внутрішніх кутів опуклого многокутника у 4 рази більша за суму його зовнішніх кутів. Скільки сторін у цього многокутника?

177. Знайти кількість сторін опуклого многокутника, у якого сума внутрішніх кутів більша за суму зовнішніх на 720°.

Правильний многокутник

178. Чи існує п'ятикутник, усі сторони якого рівні і який не є правильним?

348. Діагоналі опуклого чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці M. Площі трикутників AMB, BMC і CMD відповідно дорівнюють 6 см^2, 4 см^2 і 8 см^2. Знайти площу трикутника AMD.

349. В коло вписано чотирикутник, сторони якого послідовно дорівнюють 3 см, 5 см, 8 см, 10 см. Знайти площу чотирикутника.

Площі подібних фігур

350. Сторони двох правильних трикутників відносяться як 5:7. Як відносяться їх площі?

351. Сторона одного квадрата дорівнює діагоналі другого. Як відносяться їх площі?

352. Знайти відношення площ частин, на які поділяє трикутник середня лінія.

353. Площі двох квадратів відносяться як 2:5. Сторона більшого квадрата дорівнює 8 см. Знайти сторону меншого квадрата.

354. Периметри подібних многокутників відносяться як 3:8, а різниця їх площ дорівнює 385 см^2. Знайти площі многокутників.

355. Пряма, паралельна основі трикутника, поділяє його на дві частини рівної площі. Знайти відрізок цієї прямої, що міститься між сторонами трикутника, якщо основа трикутника дорівнює 6 см.

356. Сторону AB трикутника ABC поділено на частини у відношенні 3:4:5, рахуючи від вершини A, і через точки поділу проведено прямі, паралельні стороні BC. Знайти відношення площ отриманих частин.

357. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 12 см. Пряма, паралельна медіані трикутника, проведеної до гіпотенузи, ділить трикутник на частини, площі яких відносяться як 1:5. Знайти довжину відрізка цієї прямої, що міститься між сторонами трикутника.

358. M — середина сторони BC квадрата $ABCD$. Відрізки AM і BD перетинаються в точці P. Знайти площу трикутника APD, якщо площа трикутника BPM дорівнює 6 см^2.

359. Провести пряму, паралельну медіані даного трикутника, так, щоб вона відтинала $\frac{1}{4}$ частину його площі.

360. Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці E. Знайти площу трапеції, якщо $AD : BC = 7 : 5$, а площа трикутника AED дорівнює 98 см^2.

Площа круга та його частин

361. Знайти площу круга, радіус якого дорівнює: 1) 3 см; 2) π см; 3) $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ см.

362. Знайти з точністю до десятих радіус круга, площа якого дорівнює 4 $см^2$.

363. Радіус круга зменшили у 3 рази. Як при цьому змінилась площа круга?

364. Знайти площу круга, довжина кола якого дорівнює 8π см.

365. Довжини двох кіл дорівнюють 8π см і 12π см. Чому дорівнює відношення площ відповідних кругів?

366. Знайти площу круга, описаного навколо правильного трикутника, площа якого дорівнює $9\sqrt{3}$ $см^2$.

367. Знайти відношення площ вписаного і описаного кругів для правильного шестикутника.

368. Знайти площу кільця, розміщеного між двома концентричними колами, радіуси яких дорівнюють 4 см і 6 см.

369. Знайти площу сектора круга радіуса 5 см, якщо відповідний цьому сектору центральний кут дорівнює: 1) 20°; 2) 150°; 3) 240°.

370. Яку частину круга становить площа сектора, якщо відповідний сектору центральний кут дорівнює: 1) 40°; 2) 105°; 3) 330°?

371. Площа сектора становить $\frac{3}{8}$ площі круга. Знайти градусну міру центрального кута, який відповідає даному сектору.

372. Знайти радіус круга, якщо площа сектора цього круга дорівнює 8,5 $см^2$, а центральний кут, що відповідає цьому сектору, дорівнює 108°.

373. Знайти площу кругового сегмента, якщо радіус круга дорівнює 10 см, а дуга сектора містить: 1) 30°; 2) 135°; 3) 210°.

374. Знайти площу кругового сегмента, якщо його основа дорівнює 4 см, а дуга містить: 1) 45°; 2) 300°.

375. Чи може сегмент круга бути одночасно і сектором?

376. Знайти площі заштрихованих фігур, зображених на мал. 34.

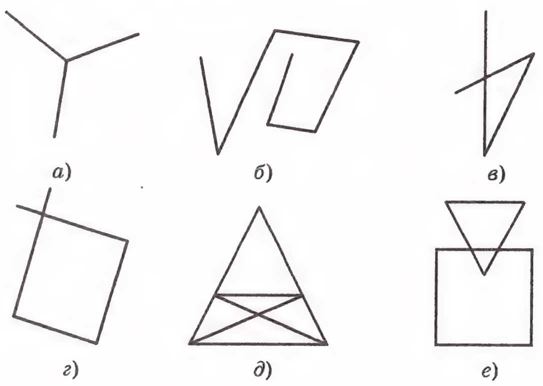
377. Знайти площу круга, вписаного в рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 10 см, а бічна сторона — 13 см.

159. Менша сторона трикутника, вписаного в коло, дорівнює 8 см, а вершини трикутника ділять коло на три дуги, градусні міри яких відносяться як 2:3:7. Знайти невідомі сторони трикутника.

160. На сторонах трикутника ABC ($AC = a$, $\angle A = \alpha$, $\angle C = \varphi$) зовні нього побудовано квадрати і їх центри послідовно з'єднано. Визначити периметр отриманого трикутника. Розв'язати задачу у загальному випадку, а також обчислити, якщо $AC = 6$ см, $\angle A = 50°$, $\angle C = 100°$.

Ламана. Опуклий многокутник

161. Які з наведених на малюнку 97 фігур можна назвати ламаними? Відповідь обґрунтувати. Серед вибраних ламаних вказати прості.



Мал. 97

162. Чи можуть ланки замкненої ламаної дорівнювати: 1) 2 см, 4 см, 7 см, 12 см; 2) 3 см, 17 см, 8 см, 5 см; 3) 11 см, 5 см, 26 см, 4 см, 6 см? Відповідь обґрунтувати.

163. Скільки діагоналей можна провести з однієї вершини опуклого десятикутника? Знайти загальну кількість діагоналей опуклого десятикутника.

164. Довести, що в опуклому шестикутнику сума довжин діагоналей більша за суму довжин сторін.

152. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 70 см, а бічна сторона — 37 см. Знайти радіус кола, описаного навколо трикутника.

153. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 2 см і 14 см, а бічна сторона дорівнює 10 см. Знайти радіус кола, описаного навколо трапеції.

154. У коло, радіус якого дорівнює 8 см, вписано трапецію, основа якої у 2 рази менша за кожну з інших сторін. Знайти діагоналі трапеції.

155. У трикутнику ABC O — точка перетину бісектрис. Відомо, що радіуси кіл, описаних навколо трикутників ABC і AOB, рівні. Довести, що $\angle C = 60^\circ$.

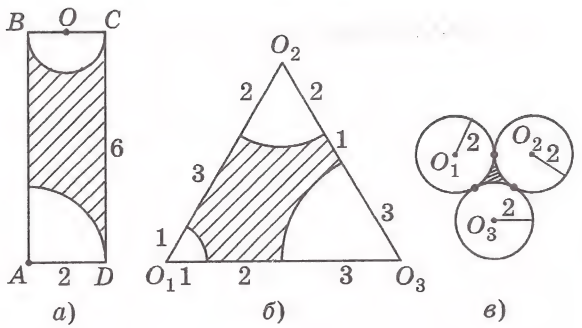
Розв'язування трикутників

156. Знайти невідомі сторони і кути трикутника ABC, якщо:

1) $AC = 10$ см, $\angle C = 26^\circ$, $\angle B = 62^\circ$;
2) $AB = 16$ см, $\angle A = 38^\circ$, $\angle B = 49^\circ$;
3) $AB = 15$ см, $BC = 8$ см, $\angle B = 65^\circ$;
4) $AB = 7$ см, $BC = 11$ см, $\angle B = 96^\circ$;
5) $AB = 9$ см, $BC = 10$ см, $AC = 12$ см;
6) $AB = 7$ см, $BC = 11$ см, $AC = 16$ см;
7) $AB = 18$ см, $BC = 20$ см, $\angle A = 110^\circ$;
8) $AB = 12$ см, $BC = 15$ см, $\angle A = 50^\circ$;
9) $AB = 14$ см, $BC = 9$ см, $\angle A = 25^\circ$;
10) $AB = 28$ см, $BC = 12$ см, $\angle A = 35^\circ$.

157. У трикутнику ABC $AC = CB = 10$ см, $\angle A = 70^\circ$. Знайти: 1) сторону AB; 2) висоту BK; 3) медіану BM; 4) бісектрису AD; 5) радіус описаного кола; 6) радіус вписаного кола.

158. Діагональ AC рівнобічної трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) дорівнює 6 см, $\angle CAD = 42^\circ$, $\angle BAD = 74^\circ$. Знайти: 1) сторони трапеції; 2) радіус кола, описаного навколо трикутника ABC; 3) радіус кола, вписаного в трикутник COD (O — точка перетину діагоналей трапеції).



Мал. 34

378. Гострий кут ромба дорівнює 30°, а площа круга, вписаного в ромб, дорівнює 6π см^2. Знайти площу ромба.

379. Два круга мають спільну хорду. Знайти відношення площ цих кругів, якщо з центра першого круга спільну хорду видно під кутом 60°, а з центра другого — під кутом 120°.

380. В правильний трикутник, сторона якого дорівнює 4 см, вписано коло, і навколо нього ж описано коло. Знайти площу кругового кільця, що міститься між цими колами.

381. Довжини сторін трикутника дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см. В нього вписано півкруг, діаметр якого лежить на більшій стороні трикутника. Знайти площу півкруга.

382. На стороні правильного трикутника зі стороною 6 см побудовано півкруг, який лежить в тій же півплощині, що і трикутник. Визначити площу тієї частини трикутника, яка лежить поза півкругом.

383. Радіус круга дорівнює 4 см. В ньому проведено хорду, довжина якої дорівнює стороні правильного трикутника, вписаного в цей круг. Визначити площу більшого з сегментів, що визначаються цією хордою.

384. В круговий сектор, дуга якого містить 60°, вписано круг радіусом 3 см. Знайти площу сектора.

385. Радіус круга дорівнює 2 см. По різні боки від центра круга проведено паралельні хорди, одна з яких дорівнює стороні правильного вписаного чотирикутника, а друга — стороні правильного вписаного шестикутника. Знайти площу частини круга, яка міститься між хордами.

Взаємне розміщення прямих і площин у просторі

386. Чи можуть дві різні площини мати лише одну спільну точку?

387. Скільки різних площин можна провести через дві довільні точки?

388. Чи можна стверджувати, що пряма, яка перетинає одну з двох паралельних прямих, перетинає і другу: 1) на площині; 2) у просторі?

389. Точки A, B, C і D не лежать в одній площині. Чи можуть прямі AB і CD перетинатись?

390. Через точки A і B прямої l проведені до неї перпендикулярні прямі AC і BD. Чи вірно, що прямі AC і BD паралельні: 1) на площині; 2) у просторі?

391. Прямі a і b не лежать в одній площині і прямі b і c не лежать в одній площині. Чи вірно, що прямі a і c не лежать в одній площині?

392. Точка A не належить площині α. Скільки існує прямих, які проходять через точку A і паралельні площині α?

393. Пряма a паралельна площині α. Чи існують у площині α прямі, не паралельні прямій a?

394. Чи можуть бути паралельними площини, які проходять через непарарлельні прямі?

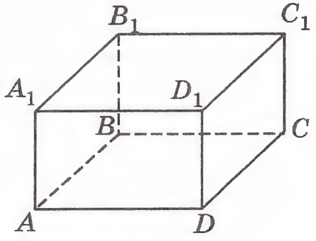
395. Чи вірно, що якщо пряма не перпендикулярна до площини, то вона не перпендикулярна жодній прямій цієї площини?

396. Пряма b перпендикулярна площині β. Скільки існує площин, які містять пряму b і перпендикулярні площині β?

Призма

397. На мал. 35 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Вказати:

1) ребра, паралельні ребру AD;
2) ребра, перпендикулярні ребру AA_1;



Мал. 35

141. Бісектриса гострого кута паралелограма, що дорівнює 45°, ділить діагональ на відрізки довжиною $4\sqrt{2}$ см і 7 см. Знайти довжини відрізків, на які ця бісектриса ділить сторону паралелограма.

142. У трикутнику, сторони якого дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см, проведено півколо, центр якого належить більшій стороні трикутника і яке дотикається двох інших сторін. На які відрізки центр півкола ділить більшу сторону?

143. Центр кола, вписаного в рівнобедрений трикутник, ділить висоту, проведену до основи, на відрізки довжиною 8 см і 17 см. Знайти сторони трикутника.

144. У рівнобедреному трикутнику бічна сторона дорівнює 26 см, а висота, проведена до основи, — 20 см. Знайти радіус кола, вписаного в трикутник.

145. У рівнобедреному трикутнику радіус вписаного кола на 4 см менший від висоти, проведеної до основи. Бічна сторона дорівнює 20 см. Знайти периметр трикутника.

146. Знайти бісектриси гострих кутів прямокутного трикутника з катетами, рівними 24 см і 18 см.

Формула $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R$

147. У трикутнику ABC $AC = 5\sqrt{2}$ см, $\angle B = 45^\circ$. Знайти радіус кола, описаного навколо цього трикутника.

148. У трикутнику ABC $\angle C = 45^\circ$, а радіус описаного кола $R = 8\sqrt{2}$ см. Знайти сторону AB.

149. У трикутнику ABC $AC = 12$ см, $AB = 8$ см, $R = 4\sqrt{3}$ см, де R — радіус описаного кола. Знайти сторону BC. Скільки розв'язків має задача?

150. У трикутнику ABC BD — бісектриса, $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 105^\circ$. Знайти радіус кола, описаного навколо трикутника ABC, якщо радіус кола, описаного навколо трикутника BDC, дорівнює $8\sqrt{6}$ см.

151. У трикутнику ABC H — точка перетину висот. Знайти радіус кола описаного навколо трикутника AHB, якщо радіус кола, описаного навколо трикутника AHC, дорівнює 5 см.

Властивість бісектриси кута

131. AK — бісектриса кута A трикутника ABC. Знайти:
1) відрізки BK і KC, якщо $AB = 10$ см, $AC = 12$ см, $BC = 11$ см;
2) сторону AC, якщо $BK : KC = 4 : 9$, $AB = 16$ см;
3) сторону BC, якщо $AB : AC = 5 : 3$, $BK - KC = 4$ см;
4) сторони AB, BC і CA, якщо $AB + AC = 68$ см, $BK = 8$ см, $KC = 9$ см.

132. Точка N лежить на стороні BC трикутника ABC. Порівняти кути BAN і NAC, якщо $AB = 6$ см, $AC = 8$ см, $BN = 5$ см, $NC = 6$ см.

133. Бісектриса гострого кута прямокутного трикутника ділить протилежний катет у відношенні $2 : \sqrt{2}$. Знайти гострі кути трикутника.

134. Бісектриса прямого кута прямокутного трикутника ділить гіпотенузу на відрізки довжиною 30 см і 40 см. Знайти катети.

135. Бісектриса гострого кута прямокутного трикутника ділить катет у відношенні 8:15, а різниця цих відрізків дорівнює 14 см. Знайти сторони трикутника.

136. Висота AK трикутника ABC дорівнює 8 см і ділить сторону BC на відрізки $BK = 6$ см і $KC = 15$ см. На які відрізки ділить сторону BC бісектриса кута A?

137. Різниця двох сторін прямокутника дорівнює 34 см, а його діагональ ділиться бісектрисою прямого кута на відрізки, довжини яких відносяться як 7:24. Знайти діагональ прямокутника.

138. Бісектриса гострого кута прямокутного трикутника ділить його протилежний катет на відрізки довжиною 10 см і 26 см. На які відрізки ділить ця бісектриса медіану, проведену з вершини прямого кута?

139. Діагональ рівнобічної трапеції ділить висоту, проведену з вершини тупого кута, на відрізки, довжини яких відносяться як 4:5, а бічна сторона трапеції дорівнює її меншій основі. Знайти відношення основ трапеції.

140. В прямокутний трикутник з кутом 60° вписано ромб зі стороною 6 см так, що кут 60° у них спільний і всі вершини ромба лежать на сторонах трикутника. Знайти сторони трикутника.

3) ребра, мимобіжні з ребром CC_1;
4) ребра, паралельні грані ABC;
5) ребра, перпендикулярні грані A_1B_1B;
6) грані, перпеникулярні грані $A_1B_1C_1$.

398. Знайти повну поверхню і об'єм куба з ребром 4 см.

399. Знайти площу бічної поверхні, площу повної поверхні і об'єм прямокутного паралелепіпеда (мал. 35), якщо $AB = 4$ см, $BC = 3$ см, $AA_1 = 5$ см.

400. В основі прямої призми лежить паралелограм, сторони якого 6 см і 8 см, а гострий кут 60°. Знайти площу бічної поверхні, площу повної поверхні і об'єм призми, якщо її висота дорівнює 10 см.

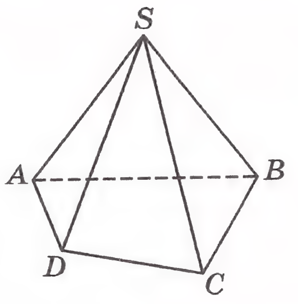
401. Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює 6 см, а висота 5 см. Знайти площу бічної поверхні і об'єм призми.

402. В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник, гіпотенуза якого дорівнює 10 см, а один з катетів 6 см. Знайти площу бічної поверхні і об'єм призми, якщо її висота дорівнює 5 см.

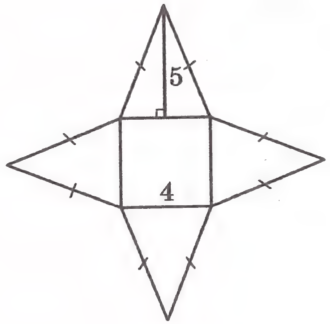
403. В основі прямої призми лежить рівнобічна трапеція з основами 6 см і 12 см і бічною стороною 5 см. Знайти площу повної поверхні і об'єм призми, якщо її висота дорівнює 4 см.

Піраміда

404. На мал. 36 зображено піраміду $SABCD$. Назвати:
1) основу піраміди;
2) вершину піраміди;
3) бічні ребра піраміди;
4) бічні грані піраміди.



Мал. 36



Мал. 37

405. Усі грані трикутної піраміди — правильні трикутники зі стороною 8 см. Знайти площу повної поверхні піраміди.

406. Обчислити площу повної поверхні правильної чотирикутної піраміди, розгортку якої зображено на мал. 37.

407. Бічні ребра SA, SB, SC і SD чотирикутної піраміди $SABCD$ рівні між собою, $\angle ASB = \angle BSC = \angle CSD = \angle DSA = 45^\circ$. Знайти площу бічної поверхні піраміди, якщо $SA = 6$ см.

408. В основі піраміди лежить квадрат зі стороною 4 см. Знайти об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює 3 см.

409. Знайти об'єм правильної трикутної піраміди (мал. 38), основа якої — трикутник MKP зі стороною 6 см, DO — висота піраміди, $DO = 4$ см.

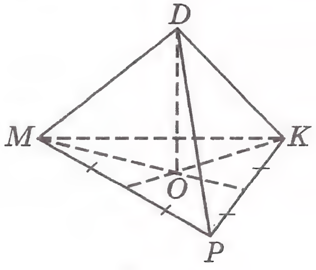
410. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник MKP. $MK = MP = 13$ см, $KP = 24$ см. Знайти об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює 5 см.

Циліндр

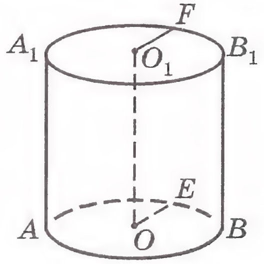
411. На мал. 39 зображено циліндр. Назвати відрізок, що є:

1) висотою циліндра;
2) твірною циліндра;
3) радіусом нижньої основи циліндра;
4) радіусом верхньої основи циліндра.

412. Радіус основи циліндра дорівнює 5 см, а його висота 4 см. Знайти площу повної поверхні і об'єм циліндра.

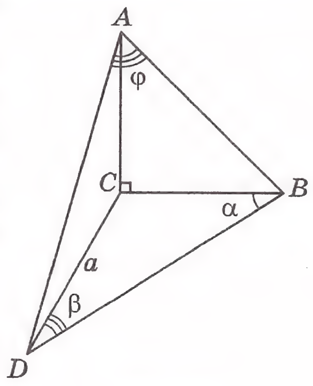


Мал. 38



Мал. 39

117. На мал. 96 $AC = CB$, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle CBD = \alpha$, $\angle CDB = \beta$, $\angle DAB = \varphi$, $DC = a$. Знайти AD.



Мал. 96

118. Сума сторін BC і AC трикутника ABC дорівнює 2 см, $\angle A = 150^\circ$, $\angle B = 45^\circ$. Знайти сторони BC і AC трикутника.

119. В трикутнику ABC проведено бісектрису CD. Довести, що $CD^2 = \dfrac{AD \cdot BD \sin A \sin B}{\sin^2 \frac{C}{2}}$.

120. Довести, що з відрізків з довжинами $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ можна скласти трикутник (α, β, γ — кути трикутника).

Співвідношення між кутами трикутника та протилежними сторонами

121. У трикутнику ABC $BC > AB > AC$. Порівняти кути A, B і C.

122. У трикутнику ABC $\angle B = 56^\circ$, $\angle C = 35^\circ$. Порівняти сторони AB, BC і CA.

123. У трикутнику ABC BC — найбільша сторона. Чи може кут A дорівнювати 58°?

124. Визначити вид трикутника, сторони якого дорівнюють:

1) 5 см, 8 см, 10 см;
2) 9 см, 10 см, 12 см;
3) 25 см, 24 см, 7 см.

125. На стороні AB рівностороннього трикутника ABC взято довільну точку M. Довести, що $CM < AB$.

126. У трикутнику ABC проведено бісектрису BD. Відомо, що $CD > AD$. Довести, що $\angle A > \angle C$.

127. У трикутників ABC і MNP $AB = MN$, $BC = NP$, $AC < MP$. Довести, що $\angle P < \angle B$.

128. У трикутнику ABC $\angle C = 90^\circ$, CD — висота, $AD < BD$. Довести, що $\angle A > \angle B$.

129. У трикутнику ABC $\angle A = 60^\circ$, $AC = 2$ см, $BC = \sqrt{6}$ см. Знайти $\angle B$.

130. У трикутнику ABC $AC = 4$ см, $BC = 4\sqrt{2}$ см, $\angle B = 30^\circ$. Знайти кут A. Скільки розв'язків має задача?

106. Медіани AM і CN трикутника ABC дорівнюють 6 см і 10 см, а кут BOC дорівнює 120° (O — точка перетину медіан). Знайти довжину третьої медіани.

107. Довести, що якщо у трапеції сума квадратів діагоналей вдвічі більша, ніж квадрат середньої лінії, то діагоналі трапеції перпендикулярні.

Теорема синусів

108. У трикутнику ABC $\angle B = 120°$, $\angle C = 45°$, $AB = 7\sqrt{2}$ см. Знайти сторону AC.

109. У трикутнику ABC $AB = 9\sqrt{3}$ см, $\angle B = 75°$, $\angle C = 60°$. Знайти сторону BC.

110. У трикутнику ABC $AC = 8$ см, $BC = 15$ см. Чи може $\sin \angle A = \frac{3}{5}$?

111. У трикутнику ABC $AC = b$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Знайти сторони AB і BC.

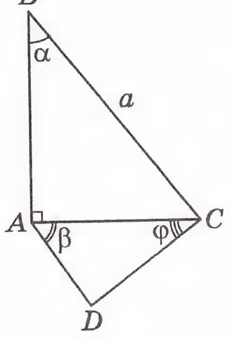
112. На мал. 95 $\angle BAC = 90°$, $BC = a$, $\angle ABC = \alpha$, $\angle DAC = \beta$, $\angle DCA = \varphi$. Знайти DC.

113. В прямокутному трикутнику бісектриса прямого кута дорівнює l, а гострий кут — α. Знайти катети трикутника.

114. В паралелограмі $ABCD$ сторона AB дорівнює a, діагональ BD утворює зі сторонами AB і AD кути α і β відповідно. Знайти другу сторону і діагоналі паралелограма.

115. У рівнобедреному трикутнику бічна сторона дорівнює b, а кут при вершині α. Знайти довжину бісектриси кута при основі трикутника.

116. Два кути трикутника дорівнюють α і β, а бісектриса третього кута ділить його сторону на відрізки a і b. Знайти сторони трикутника та довжину бісектриси.



Мал. 95

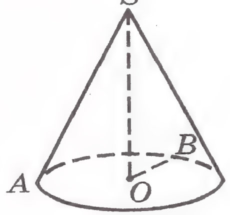
413. Прямокутник, сторони якого дорівнюють 10 см і 6 см, обертається навколо більшої сторони. Знайти площу повної поверхні і об'єм утвореного циліндра.

Конус

414. На мал. 40 зображено конус. Назвати відрізок, що є:
1) висотою конуса;
2) твірною конуса;
3) радіусом основи конуса.

415. Радіус основи конуса дорівнює 15 см, а твірна 17 см. Знайти площу повної поверхні і об'єм конуса.

416. Прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють 6 см і 8 см, обертається навколо меншого катета. Знайти площу повної поверхні і об'єм утвореного конуса.



Мал. 40

417. Катети прямокутного трикутника дорівнюють a і b. Він обертається спочатку навколо катета a, а потім навколо катета b. Знайти відношення об'ємів отриманих конусів.

Куля

418. Знайти площу поверхні і об'єм кулі, радіус якої дорівнює 6 см.

419. Півкруг, діаметр якого дорівнює 8 см, обертається навколо цього діаметра. Знайти площу поверхні і об'єм утвореної кулі.

420. Радіус кулі збільшили у три рази. Як при цьому змінилась площа поверхні і об'єм кулі?

Варіант 2

Подібність фігур. Гомотетія

1. Накреслити в зошиті відрізок $DC = 4$ см і позначити точку M, що не належить цьому відрізку. Побудувати відрізок, гомотетичний відрізку DC з центром гомотетії в точці M і коефіцієнтом $k = \frac{1}{2}$.
2. Накреслити в зошиті гострий кут і позначити точку F, яка лежить на одній з сторін даного кута. Побудувати кут, гомотетичний даному куту з центром гомотетії в точці F і коефіцієнтом $k = 2$.
3. Побудувати прямокутник, гомотетичний даному прямокутнику з центром гомотетії в точці перетину його діагоналей і коефіцієнтом гомотетії $k = 3$.
4. Позначити в зошиті дві точки P і D. Знайти таку точку M, щоб точка P переходила в точку D при гомотетії з центром M і коефіцієнтом $k = \frac{1}{4}$.
5. Гомотетія з центром у початку координат переводить точку $F(-4; 6)$ в точку $C(-12; 18)$. Знайти коефіцієнт гомотетії.
6. Дано два паралельних, але не рівних між собою відрізка. Чи можна один з них перетворити в інший за допомогою гомотетії? Як це зробити?
7. Чи можуть два трикутники бути гомотетичними та рівними?

Властивості подібних трикутників

8. Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні (мал. 41). Знайти невідомі сторони цих трикутників.

93. Одна сторона трикутника на 4 см менша за другу, а кут між ними дорівнює 120°. Знайти периметр трикутника, якщо третя його сторона дорівнює $\sqrt{79}$ см.
94. Дві сторони трикутника відносяться як $3\sqrt{2} : 7$, а кут між ними дорівнює 45°. Знайти ці сторони, якщо третя сторона трикутника дорівнює 30 см.
95. Дві сторони трикутника дорівнюють 6 см і $\sqrt{76}$ см, а кут проти більшої з них — 120°. Знайти третю сторону трикутника.
96. У рівнобічній трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) $BC = 4$ см, $AD = 10$ см, $AB = CD = 5$ см. Знайти довжину діагоналей трапеції, використовуючи теорему косинусів.
97. У рівнобедреному трикутнику бічна сторона дорівнює b, а кут при основі — α. Знайти довжину медіани, проведеної до бічної сторони трикутника.
98. Навколо чотирикутника $ABCD$ можна описати коло. Відомо, що $BC = CD = a$, $\angle ABC = \alpha$. Знайти різницю сторін AB і AD.
99. Для сторін трикутника виконується рівність $b^2 = a^2 + c^2 + ac\sqrt{2}$. Довести, що кут проти сторони b дорівнює 135°.
100. Сторони трикутника дорівнюють 7 см і 10 см, а кут між ними –45°. Знайти довжину медіани, проведеної до третьої сторони трикутника.

Сума квадратів діагоналей паралелограма

101. Знайти діагоналі паралелограма, якщо їх довжини відносяться як 1:7, а сторони паралелограма дорівнюють 9 см і 12 см.
102. Одна із сторін паралелограма на 2 см менша за другу, а діагоналі паралелограма дорівнюють 6 см і 2 см. Знайти сторони паралелограма.
103. Сторони трикутника дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см. Знайти довжину медіани трикутника, проведеної до середньої сторони.
104. У трикутнику ABC $AC = 22$ см, $AB : BC = 7 : 12$, AK — медіана, $AK = 14$ см. Знайти сторони BC і AB.
105. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 10 см, а медіана, проведена до бічної сторони, — 8 см. Знайти бічну сторону трикутника.

84. Чотирикутник $ABCD$ вписано в коло. Діагональ AC цього чотирикутника є діаметром кола. Знайти $\angle BAC$, якщо $\angle CAD = 35^\circ$, а кут між діагоналями чотирикутника, який лежить проти сторони AD, дорівнює 64°.

85. Через вершини B і C трикутника ABC проведено коло, яке перетинає сторони AB і AC трикутника в точках M і N відповідно. Довести, що трикутники BAC і NAM подібні. Знайти AM і AN, якщо AB = 9 см, AC = 10 см, BC = 12 см, MN = 4 см.

86. Рівнобічну трапецію, один з кутів якої дорівнює 130°, вписано в коло. Кут між діагоналями трапеції, що лежить проти бічної сторони, дорівнює 80°. Знайти положення центра кола, описаного навколо трапеції, відносно трапеції.

Теорема косинусів

87. Знайти сторону AB трикутника ABC, якщо:
1) BC = 5 см, $AC = 4\sqrt{2}$ см, $\angle C = 45^\circ$;
2) BC = 8 см, AC = 11 см, $\angle C = 120^\circ$.

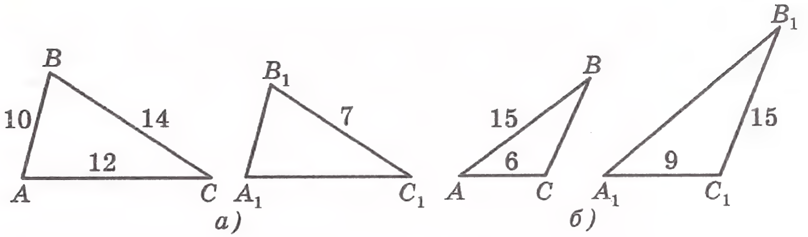
88. Знайти косинуси кутів трикутника, сторони якого дорівнюють 9 см, 10 см і 15 см.

89. Дві сторони трикутника дорівнюють 5 см і 8 см, а синус кута між ними дорівнює $\frac{8}{15}$. Знайти третю сторону трикутника. Скільки розв'язків має задача?

90. Сторони паралелограма дорівнюють 7 см і $6\sqrt{2}$ см, а кут між ними — 45°. Знайти діагоналі паралелограма.

91. На продовженнях сторін AB і AC прямокутного трикутника ABC ($\angle B = 90^\circ$) взято точки M і N відповідно. Знайти довжину відрізка MN, якщо AC = 25 см, BC = 7 см, BM = 3 см, CN = 5 см.

92. На продовженні сторони AC за точку C рівностороннього трикутника ABC взято точку D так, що відрізок CD дорівнює медіані трикутника ABC. Знайти довжину відрізка BD, якщо сторона трикутника ABC дорівнює 3 см.



Мал. 41

9. Сторони трикутника відносяться як 5:11:14. Знайти сторони подібного йому трикутника, якщо в нього:
1) периметр дорівнює 120 см;
2) середня за величиною сторона дорівнює 55 см;
3) менша сторона дорівнює 15 см;
4) сума більшої і середньої за величиною сторін дорівнює 50 см.

10. Сторони многокутника відносяться як 6:5:4:7:9. Знайти сторони подібного йому многокутника, якщо його периметр дорівнює 124 см.

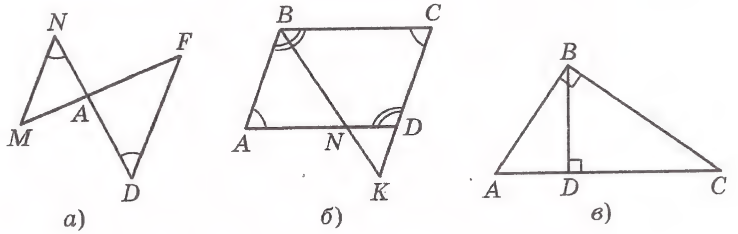
11. Сторони трикутника відносяться як 5:9:12, а більша з сторін подібного йому трикутника дорівнює 48 см. Знайти інші сторони другого трикутника.

12. Периметри подібних трикутників відносяться як 3:4, а сума їх середніх за величиною сторін дорівнює 112 см. Знайти сторони обох трикутників, якщо сторони одного з них відносяться як 4:8:7.

Ознаки подібності трикутників

13. Вказати пари подібних трикутників і довести їх подібність (мал. 42).

14. Довести, що два будь-яких рівносторінних трикутника подібні.



Мал. 42

15. У двох рівнобедрених трикутників кути при вершині рівні. Периметр першого трикутника дорівнює 110 см. Знайти його сторони, якщо сторони другого трикутника відносяться як: 1) 4:9; 2) 3:4.

16. У двох рівнобедрених трикутників кути при основі рівні. Основа першого трикутника дорівнює 16 см, а висота, проведена до неї, дорівнює 6 см. Знайти сторони другого трикутника, якщо його периметр дорівнює 54 см.

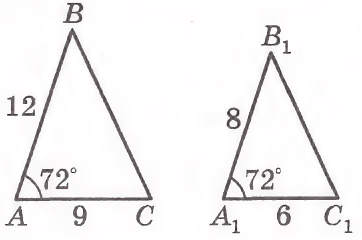
17. Два прямокутні трикутники мають по рівному гострому куту. Катети першого трикутника відносяться як 7:24. Знайти гіпотенузу другого трикутника, якщо його периметр дорівнює 168 см.

18. Кути одного трикутника відносяться як 1:3:5, а один з кутів другого трикутника на 40° більший за другий і на 40° менший за третій кут. Чи подібні ці трикутники?

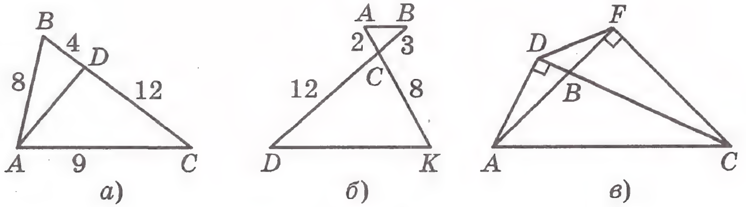
19. Довести подібність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ (мал. 43).

20. Знайти пари подібних трикутників і довести їх подібність (мал. 44).

21. У трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ $\angle C = \angle C_1$, а сторони трикутника ABC, що утворюють кут C, у 1,5 рази більші від сторін, що утворюють кут C_1. Знайти сторони AB і A_1B_1, якщо їх різниця дорівнює 3 см.



Мал. 43

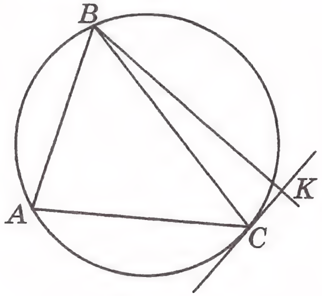


Мал. 44

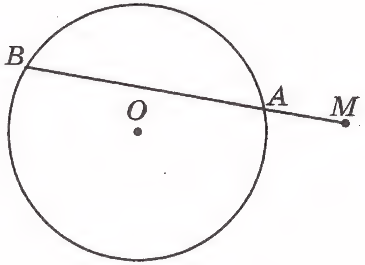
76. Навколо трикутника ABC описано коло (мал. 93). Через точку C до кола проведено дотичну, а з точки B на дотичну опущено перпендикуляр BK. Знайти $\angle BAC$, якщо $\angle KBC = 25°$.

77. З точки M проведено січну, яка перетинає коло з центром O в точках A і B (мал. 94). Довести, що $MA \cdot MB = MO^2 - R^2$ (де R — радіус кола).

78. З точки M поза колом проведено до нього дотичну MK довжиною 5 см і січну ME довжиною 12 см. Знайти довжину відрізка MF січної, що міститься поза колом.



Мал. 93



Мал. 94

79. З точки до кола проведено січну довжиною 12 см та дотичну, довжина якої становить $\frac{2}{3}$ внутрішнього відрізка січної. Знайти довжину дотичної.

Чотирикутник, вписаний в коло

80. Чи можна описати коло навколо чотирикутника $ABCD$, якщо:
1) $\angle A = 56°$, $\angle C = 124°$; 2) $\angle B = 64°$, $\angle D = 106°$?

81. Знайти кути A і B чотирикутника $ABCD$, вписаного в коло, якщо $\angle C = 38°$, $\angle D = 134°$.

82. Чи можна описати коло навколо чотирикутника, кути якого у порядку слідування відносяться як:
1) 4 : 9 : 13 : 8; 2) 6 : 7 : 10 : 8?

83. Три кути чотирикутника, вписаного в коло, взяті у порядку слідування, відносяться як 4:8:11. Знайти кути чотирикутника.

66. Два кола перетинаються в точках C і D. Через точки C і D проведено січні MK і EF відповідно. Довести, що $\angle MDK = \angle ECF$.

67. O — центр кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника ABC. Знайти кути трикутника ABC, якщо $\angle BOC = 32^{\circ}$. Скільки розв'язків має задача?

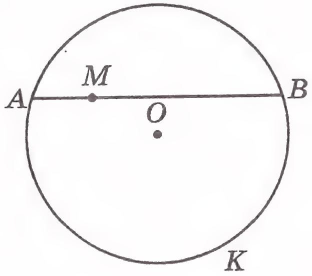
68. Довести, що точка, яка симетрична точці перетину висот трикутника відносно його сторони, лежить на описаному навколо цього трикутника колі.

69. Знайти геометричне місце точок, з яких дані відрізки AB і CD видно під заданими кутами α і β відповідно.

70. Побудувати паралелограм за двома сторонами та кутом між діагоналями.

71. M — точка, яка лежить на хорді AB кола з центром O і радіусом R (мал. 92). Довести, що

$$AM \cdot MB = R^2 - OM^2.$$



Мал. 92

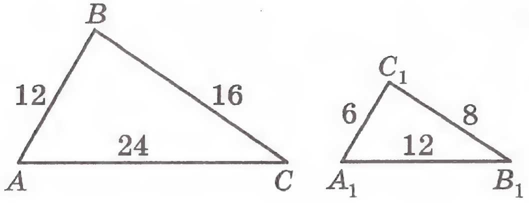
72. Хорди AB і CD кола перетинаються в точці M. Знайти довжину хорди AB, якщо $AM = 6$ см, $CM = 8$ см, $MD = 9$ см.

73. Дано точку P, яка віддалена на 7 см від центра кола радіуса 11 см. Через цю точку проведено хорду довжиною 18 см. Знайти довжини відрізків, на які ділиться ця хорда точкою P.

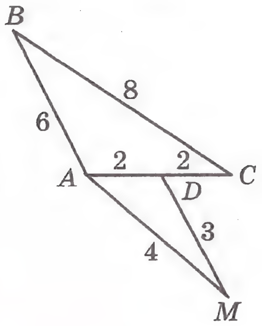
Кут, утворений дотичною і хордою

74. Хорда AB стягує дугу у 46°. Визначити кути, які утворює хорда з дотичною до кола, проведеною через точку B.

75. В кут ABC вписано коло, яке дотикається сторін кута в точках M і N. Ці точки ділять коло на частини, які відносяться як 5:13. Знайти кути трикутника BMN.



Мал. 45



Мал. 46

22. У трикутнику ABC $AC = 54$ см, $BC = 42$ см. На стороні CB відклали відрізок $BD = 35$ см, а на стороні AC — відрізок $CN = 9$ см. Чи подібні трикутники ABC і NDC?

23. Довести подібність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ (мал. 45).

24. Вказати пару подібних трикутників і довести їх подібність (мал. 46).

25. Визначити, чи подібні трикутники, якщо сторони їх дорівнюють:
1) 9 см, 10 см, 14 см і 36 см, 40 см, 56 см;
2) 7 см, 11 см, 13 см і 22 см, 33 см, 39 см.

26. Сторони одного трикутника дорівнюють 27 см, 33 см і 48 см, а сторони другого трикутника відносяться як 9:11:16. Чи подібні ці трикутники?

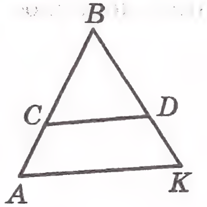
27. Катети одного прямокутного трикутника відносяться як 4:3, а гіпотенуза і висота, проведена до неї, другого трикутника дорівнюють 150 см і 72 см. Чи подібні ці трикутники?

28. На мал. 47 $CD \parallel AK$. Записати пропорції, які починаються з відношень: 1) $\frac{BC}{BA}$; 2) $\frac{AK}{CD}$; 3) $\frac{BC}{CD}$; 4) $\frac{AB}{BK}$.

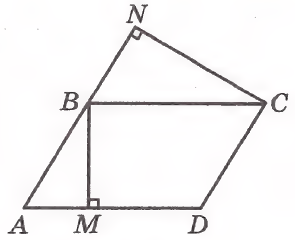
29. У паралелограмі $ABCD$ проведено висоти BM і CN (мал. 48). Довести подібність трикутників ABM і BCN.

30. Висоти паралелограма дорівнюють 12 см і 18 см, а менша сторона паралелограма дорівнює 6 см. Знайти більшу сторону.

31. Периметр паралелограма дорівнює 64 см, а його висоти — 7 см і 9 см. Знайти сторони паралелограма.



Мал. 47



Мал. 48

32. Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці M. Більша основа $AD = 26$ см, $MC = 9$ см, $CD = 4$ см. Знайти меншу основу трапеції.

33. Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці N, $DN = 36$ см. Знайти CD, якщо $AB : BN = 5 : 7$.

34. Точка перетину діагоналей трапеції ділить одну з діагоналей на відрізки довжиною 7 см і 11 см. Знайти основи трапеції, якщо їх різниця дорівнює 16 см.

35. У трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) K — точка перетину діагоналей. $AK : KC = 4 : 9$, а $KD - BK = 10$ см. Знайти BD.

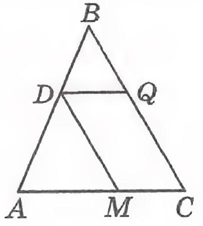
36. На стороні AB трикутника ABC вибрано точку M так, що $\angle ACM = \angle ABC$, $AM = 9$ см, $BM = 7$ см. Знайти AC.

37. У трикутник ABC вписано паралелограм $DQCM$ (мал. 49), $AC = 10$ см, $MC = 4$ см, $QC = 9$ см. Знайти BC.

38. У трикутник ABC вписано ромб $DMNA$ так, що кут A у них спільний, а вершина M належить стороні BC. $CM = 6$ см, $BM = 4$ см, $AB = 20$ см. Знайти сторону ромба.

39. У трикутник з основою 12 см вписано прямокутник, сторони якого дорівнюють 8 см і 5 см. Більша сторона прямокутника належить основі. Знайти висоту трикутника, проведену до основи.

40. Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, дорівнює 30 см, а висота, проведена до бічної сторони, — 36 см. Знайти сторони трикутника.



Мал. 49

54. Точки M і N лежать на колі по один бік від хорди AB. Відомо, що $\angle AMB = 63^\circ$. Знайти кут ANB.

55. Точки M і N лежать на колі по різні боки від хорди AB, $\angle ANB = 82^\circ$. Знайти кут AMB.

56. Навколо трикутника ABC описано коло з центром O. Знайти кут AOB, якщо: 1) $\angle C = 54^\circ$; 2) $\angle C = 136^\circ$.

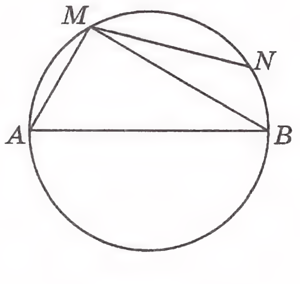
57. У трикутнику ABC $\angle A = 48^\circ$, $\angle C = 62^\circ$, O — центр описаного кола. Знайти: $\angle AOB$, $\angle AOC$, $\angle COB$.

58. Визначити кути рівнобедреного трикутника, вписаного в коло, основа якого стягує дугу у 100°.

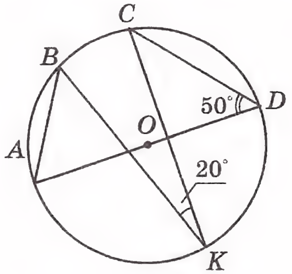
59. Хорда ділить коло у відношенні 5:13. Визначити величини вписаних кутів, які спираються на цю хорду.

60. Хорда AB ділить коло на дві дуги. Градусна міра більшої з них дорівнює 260°, а менша ділиться точкою M у відношенні 7:18, починаючи від точки B. Знайти $\angle MBA$.

61. Коло поділено трьома точками на частини, які відносяться між собою, як 2:9:7. Точки поділу сполучено між собою. Визначити кути утвореного трикутника.



Мал. 90



Мал. 91

62. Точки M і N кола лежать по один бік від діаметра AB (мал. 90). Знайти кут BMN, якщо $\angle AMN = 110^\circ$.

63. AD — діаметр кола з центром O (мал. 91). Знайти $\angle BAD$, якщо $\angle CDA = 50^\circ$, $\angle BKC = 20^\circ$.

64. Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 62°. Півколо, побудоване на бічній стороні трикутника, як на діаметрі, ділиться іншими сторонами на три дуги. Скільки градусів містять ці дуги?

65. Продовження висот гострокутного трикутника ABC, проведених з вершин A, B і C, перетинають описане коло в точках K, F і M відповідно. Довести, що $\angle KFB = \angle MFB$.

Пропорційні відрізки
в прямокутному трикутнику

42. Знайти висоту прямокутного трикутника, проведену з вершини прямого кута, якщо вона ділить гіпотенузу на відрізки довжиною 9 см і 25 см.

43. Катет прямокутного трикутника дорівнює 12 см, а його проекція на гіпотенузу — 8 см. Знайти гіпотенузу.

44. Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, ділить її на відрізки довжиною 6 см і 24 см. Знайти катети трикутника.

45. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 6 см, а проекція другого катета на гіпотенузу — 5 см. Знайти другий катет та гіпотенузу.

46. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 5 см і 12 см. Знайти висоту трикутника, проведену з вершини прямого кута.

47. Знайти висоту та бічну сторону рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 12 см і 20 см, а діагоналі перпендикулярні до бічних сторін.

48. Діагональ рівнобічної трапеції перпендикулярна до бічної сторони, а проекція цієї діагоналі на більшу основу дорівнює 10 см. Бічна сторона трапеції дорівнює 12 см. Знайти висоту і основи трапеції.

49. Перпендикуляр, проведений з точки перетину діагоналей ромба до його сторони, ділить її на відрізки довжиною 8 см і 18 см. Знайти діагоналі ромба.

50. Коло, вписане в рівнобічну трапецію, ділить точкою дотику бічну сторону на відрізки довжиною 8 см і 50 см. Знайти радіус кола та основи трапеції.

Кути, вписані в коло

51. Визначити градусну міру кута, вписаного в коло, якщо відповідний йому центральний кут дорівнює:

1) 38°; 2) 142°; 3) 180°; 4) 226°; 5) γ.

52. Визначити градусну міру центрального кута кола, якщо градусна міра відповідного йому вписаного кута дорівнює: 1) 23°; 2) 76°; 3) 90°; 4) 167°; 5) γ.

53. Точка M кола і його центр O лежать по різні боки від хорди AB. Знайти: 1) кут AMB, якщо $\angle AOB = 152^\circ$; 2) кут AOB, якщо $\angle AMB = 73^\circ$.

41. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 18 см, а бічна сторона — 15 см. Обчислити:

1) радіус кола, вписаного в трикутник;

2) радіус кола, описаного навколо трикутника.

Пропорційні відрізки в прямокутному трикутнику

42. Знайти висоту прямокутного трикутника, проведену з вершини прямого кута, якщо вона ділить гіпотенузу на відрізки довжиною 12 см і 27 см.

43. Катет прямокутного трикутника дорівнює 15 см, а його проекція на гіпотенузу — 9 см. Знайти гіпотенузу.

44. Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, ділить її на відрізки довжиною 40 см і 10 см. Знайти катети трикутника.

45. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 18 см, а проекція другого катета на гіпотенузу — 9 см. Знайти другий катет та гіпотенузу.

46. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 12 см і 16 см. Знайти висоту трикутника, проведену з вершини прямого кута.

47. Знайти висоту та бічну сторону рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 10 см і 8 см, а діагоналі перпендикулярні до бічних сторін.

48. Діагональ рівнобічної трапеції перпендикулярна до бічної сторони. Висота трапеції дорівнює 12 см, а бічна сторона — $4\sqrt{13}$ см. Знайти основи трапеції.

49. Перпендикуляр, проведений з точки перетину діагоналей ромба до його сторони, ділить її на відрізки довжиною 4 см і 25 см. Знайти діагоналі ромба.

50. Точка дотику кола, вписаного в рівнобічну трапецію, ділить її бічну сторону на відрізки довжиною 8 см і 2 см. Знайти радіус кола та основи трапеції.

Кути, вписані в коло

51. Знайти градусну міру кута, вписаного в коло, якщо відповідний йому центральний кут дорівнює:

1) 32°; 2) 134°; 3) 180°; 4) 320°; 5) β.

52. Визначити градусну міру центрального кута, якщо градусна міра відповідного йому вписаного кута дорівнює: 1) 21°; 2) 89°; 3) 90°; 4) 167°; 5) β.

53. Точка A кола і його центр O лежать по різні боки від хорди MN. Знайти: 1) кут MAN, якщо $\angle MON = 136^\circ$; 2) кут MON, якщо $\angle MAN = 129^\circ$.

54. Точки K і D лежать на колі по одну сторону від хорди AB. Знайти кут AKB, якщо $\angle ADB = 129^\circ$.

55. Точки K і D лежать на колі по різні боки від хорди AB, $\angle AKB = 107^\circ$. Знайти кут ADB.

56. Навколо трикутника DEF описано коло з центром O. Знайти кут DOF, якщо: 1) $\angle E = 38^\circ$; 2) $\angle E = 148^\circ$.

57. Хорди CD і CE лежать по різні боки від центра O кола, $\angle ECD = 84^\circ$, $\angle COE : \angle DOE = 9 : 14$. Знайти кути COE і DOE.

58. Визначити кути рівнобедреного трикутника, вписаного в коло, основа якого стягує дугу у 192°.

59. Хорда ділить коло у відношенні 8:7. Визначити величини вписаних кутів, що спираються на цю хорду.

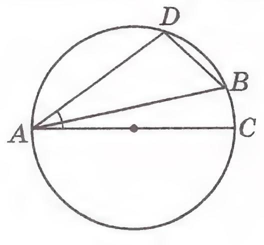
60. У колі проведено хорду AB. З точки A до неї проведено перпендикуляр, який ділить більшу з дуг кола у відношенні 5:2. Визначити градусні міри дуг, на які ділить коло хорда AB.

61. Коло поділено чотирма точками на частини, які відносяться як 3:5:7:9 і точки поділу послідовно сполучено між собою. Визначити кути утвореного чотирикутника.

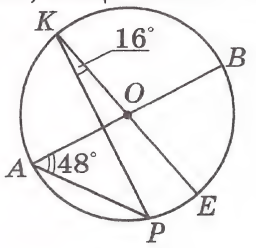
62. Точки D і B лежать по один бік від діаметра AC (мал. 50). Знайти кут ABD, якщо $\angle DAC = 52^\circ$.

63. У колі з центром O проведено два діаметри AB і KE. Точки P і E лежать по один бік від діаметра AB (мал. 51). Знайти кут ABE, якщо $\angle PKE = 16^\circ$, $\angle BAP = 48^\circ$.

64. На основі AB рівнобедреного трикутника ABC як на діаметрі побудовано півколо з центром O, яке перетинає сторони AC і BC в точках D і E відповідно. Знайти градусні міри дуг AD, DE і BE, якщо $\angle ACB = 86^\circ$.



Мал. 50



Мал. 51

30. Сторони паралелограма дорівнюють 16 см і 12 см, а відстань між більшими сторонами дорівнює 10 см. Знайти відстань між меншими сторонами паралелограма.

31. Периметр паралелограма дорівнює 44 см, а його висоти — 5 см і 6 см. Знайти сторони паралелограма.

32. Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці L. Менша основа BC дорівнює 4 см, $LB = 5$ см, $AB = 7$ см. Знайти більшу основу трапеції.

33. Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці M, $AM = 20$ см. Знайти AB, якщо $DC : CM = 3 : 2$.

34. Основи трапеції дорівнюють 6см і 14 см, а діагоналі — 15 см і 20 см. Знайти відрізки, на які кожна діагональ ділиться точкою перетину.

35. У трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) M — точка перетину діагоналей. $BM : MC = 1 : 3$, а середня лінія трапеції дорівнює 8 см. Знайти основи трапеції.

36. На стороні BC трикутника ABC вибрано точку K так, що $\angle CAK = \angle ABC$, $CK = 4$ см, $KB = 5$ см. Знайти AC.

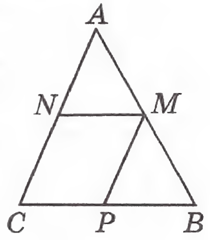
37. У трикутник ABC вписано паралелограм $MNCP$ (мал. 89). $AC = 10$ см, $BC = 12$ см, $MN = 3$ см. Знайти MP.

38. У трикутник ABC вписано ромб $DKFC$ так, що кут C у них спільний, а вершина K належить стороні AB. Сторони ромба дорівнюють 4 см, $BF = 3$ см. Знайти AC.

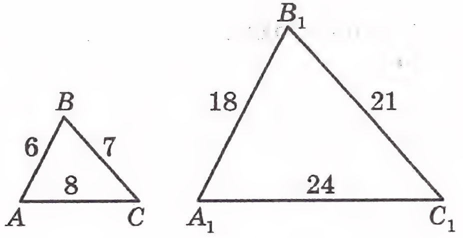
39. У трикутник з основою 10 см і висотою 7 см вписано прямокутник, сторони якого відносяться як 4:7, причому менша сторона належить основі трикутника. Знайти сторони прямокутника.

40. Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, дорівнює 40 см, а висота, проведена до бічної сторони, — 48 см. Знайти сторони трикутника.

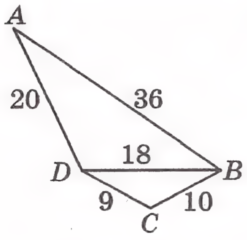
41. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 14 см, а бічна сторона — 25 см. Обчислити:
1) радіус кола, вписаного в трикутник;
2) радіус кола, описаного навколо трикутника.



Мал. 89



Мал. 85



Мал. 86

23. Довести подібність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ (мал. 85).

24. Вказати пару подібних трикутників і довести їх подібність (мал. 86).

25. Визначити, чи подібні трикутники, якщо сторони їх дорівнюють:

1) 6 см, 10 см, 7 см і 30 см, 50 см, 35 см;

2) 4 см, 11 см, 12 см і 12 см, 22 см, 26 см.

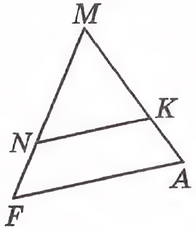
26. Сторони одного трикутника відносяться як 6:8:9, а сторони другого трикутника дорівнюють 24 см, 32 см і 36 см. Чи подібні ці трикутники?

27. Катети одного прямокутного трикутника дорівнюють 12 см і 35 см, а гіпотенуза і висота, проведена до неї, другого трикутника відповідно дорівнюють 1369 см і 420 см. Чи подібні ці трикутники?

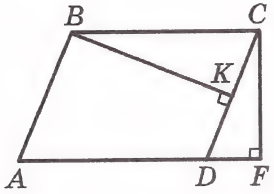
28. На мал. 87 $NK \parallel FA$. Записати пропорції, які починаються з відношень:

1) $\frac{MK}{MN}$;   2) $\frac{MF}{MN}$;   3) $\frac{FA}{NK}$;   4) $\frac{MA}{FA}$.

29. У паралелограмі $ABCD$ проведено висоти BK і CF (мал. 88). Довести подібність трикутників CBK і DCF.



Мал. 87



Мал. 88

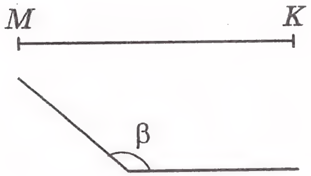
65. Продовження висоти BD трикутника ABC перетинає коло, описане навколо трикутника, у точці F. H — точка перетину висот трикутника. Довести, що $HD = DF$.

66. Два кола перетинаються в точках D і C. Через точку D проведено січну, яка перетинає кола в точках E і F. Довести, що величина кута FCE стала для кожної січної, що проходить через точку D.

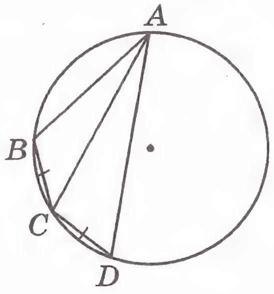
67. O — центр кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника DEF. Знайти кути трикутника DEF, якщо $\angle DOE = 116^\circ$. Скільки розв'язків має задача?

68. Знайти геометричне місце точок — середин усіх хорд, які проходять через дану внутрішню точку кола.

69. Знайти геометричне місце точок, з яких даний відрізок MK видно під заданим кутом β (мал. 52).



Мал. 52



Мал. 53

70. Побудувати трикутник за основою, кутом при вершині та медіаною, проведеною до основи.

71. Хорди BC і CD рівні (мал. 53). Довести рівність кутів BAC і DAC.

72. Хорди AB і CD кола перетинаються в точці K. Знайти довжину відрізка AK, якщо $KB = 8$ см, $CK = 6$ см, $KD = 4$ см.

73. Хорди AB і CD кола перетинаються в точці E, яка ділить хорду AB на відрізки довжиною 4 см і 9 см. На які відрізки ділить точка E хорду CD, якщо їх сума дорівнює 15 см?

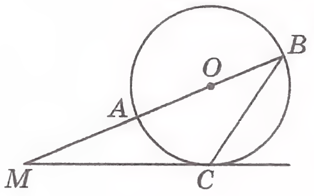
Кут, утворений дотичною і хордою

74. Хорда DE стягує дугу у 76°. Визначити кути, які утворює хорда з дотичною до кола, проведеною через точку E.

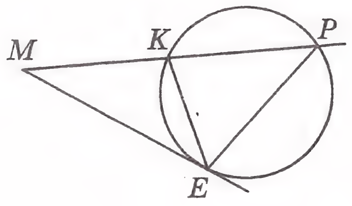
75. У трикутник ABC вписано коло, яке дотикається сторін AB, BC і AC в точках C_1, A_1 і B_1 відповідно. Знайти кути трикутника $A_1B_1C_1$, якщо $\angle A = 52^\circ$, $\angle B = 26^\circ$.

76. На продовженні діаметра AB кола взято точку M і через неї проведено дотичну MC до цього кола (мал. 54). Знайти кут ABC, якщо $\angle BCM = 124^\circ$.

77. З точки M, що лежить поза колом, проведено до нього січну MP та промінь ME (мал. 55). Довести, що якщо трикутники MEK і MPE подібні, то промінь ME дотикається кола.



Мал. 54



Мал. 55

78. З точки M поза колом проведені до нього дотична ME довжиною 6 см та січна MK, відрізок DM якої, що лежить поза колом, дорівнює 4 см. Знайти довжину відрізка січної, що міститься всередині кола.

79. Радіус кола дорівнює 10 см. З точки поза колом проведені до нього дотична довжиною $2\sqrt{7}$ см та січна, відстань якої від центра кола дорівнює 8 см. Знайти довжину січної.

Чотирикутник, вписаний в коло

80. Чи можна описати коло навколо чотирикутника $ABCD$, якщо:

1) $\angle B = 82^\circ$, $\angle D = 108^\circ$; 2) $\angle A = 64^\circ$, $\angle B = 116^\circ$?

81. Знайти кути A і B чотирикутника $ABCD$, вписаного в коло, якщо $\angle C = 37^\circ$, $\angle D = 106^\circ$.

82. Чи можна описати коло навколо чотирикутника, кути якого у порядку слідування відносяться як:

1) 3 : 7 : 6 : 2; 2) 5 : 9 : 10 : 7?

15. У двох рівнобедрених трикутників кути при вершині рівні. Периметр першого трикутника дорівнює 144 см. Знайти його сторони, якщо сторони другого трикутника відносяться як: 1) 5:2; 2) 7:10.

16. У двох рівнобедрених трикутників кути при основі рівні. Основа першого трикутника дорівнює 10 см, а висота, проведена до неї — 12 см. Знайти сторони другого трикутника, якщо його периметр дорівнює 72 см.

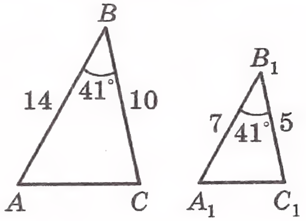
17. Два прямокутні трикутники мають по рівному гострому куту. Катети першого трикутника відносяться як 12:35. Знайти гіпотенузу другого трикутника, якщо його периметр дорівнює 420 см.

18. Кути одного трикутника відносяться як 5:12:18, а один з кутів другого трикутника на 35° більший за другий і на 35° менший за третій кут. Чи подібні ці трикутники?

19. Довести подібність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ (мал. 83).

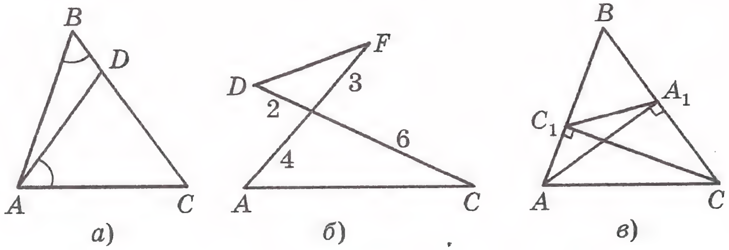
20. Знайти пари подібних трикутників і довести їх подібність (мал. 84).

21. У трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ $\angle B = \angle B_1$, а сторони трикутника ABC, що утворюють кут B, у 2,5 рази менші від сторін, що утворюють кут B_1. Знайти сторони AC і A_1C_1, якщо їх сума дорівнює 10,5 см.

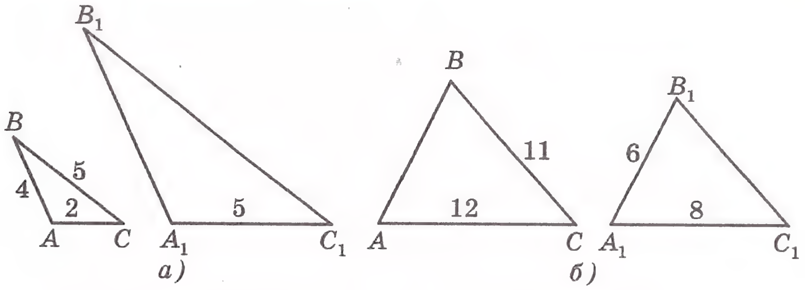


Мал. 83

22. У трикутнику ABC $AB = 24$ см, $BC = 18$ см. На стороні AB відклали відрізок $BK = 16$ см, а на стороні BC — відрізок $CD = 6$ см. Чи подібні трикутники ABC і DBK?



Мал. 84



Мал. 81

9. Сторони трикутника відносяться як 7:5:9. Знайти сторони подібного йому трикутника, якщо в нього:
   1) периметр дорівнює 42 см;
   2) більша сторона дорівнює 27 см;
   3) середня за величиною сторона дорівнює 28 см;
   4) сума більшої і меншої сторін дорівнює 84 см.

10. Сторони многокутника відносяться як 3:7:2:5:11:4. Знайти сторони подібного йому многокутника, якщо його периметр дорівнює 128 см.

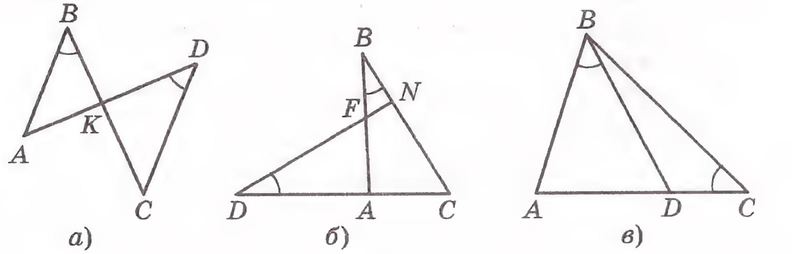
11. Сторони трикутника відносяться як 4:8:9, а менша сторона подібного йому трикутника дорівнює 24 см. Знайти інші сторони другого трикутника.

12. Периметри подібних трикутників відносяться як 2:5, а сума їх більших сторін дорівнює 56 см. Знайти сторони трикутників, якщо сторони одного з них відносяться як 2:3:4.

Ознаки подібності трикутників

13. Вказати пари подібних трикутників і довести їх подібність (мал. 82).

14. Довести, що рівнобедрені трикутники подібні, якщо рівні їх кути при основі.

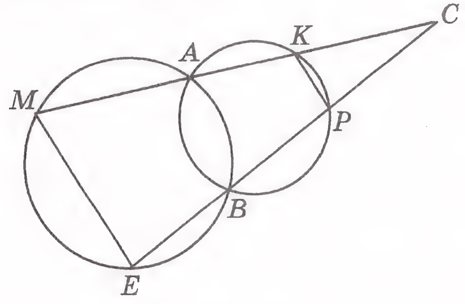


Мал. 82

83. Чотирикутник $ABCD$ вписаний в коло. Кут A більший за кут B на 58° і у 4 рази більший за кут C. Знайти кути чотирикутника.

84. У чотирикутнику $ABCD$ $\angle BAD = 74^\circ$, $\angle BCD = 106^\circ$, $\angle ABD = 47^\circ$, $\angle CBD = 58^\circ$. Визначити кут між діагоналями чотирикутника, який лежить проти сторони BC.

85. Два кола перетинаються в точках A і B. Через точки перетину кіл проведено прямі, які перетинаються в точці C і перетинають кола в точках M, K, P і E (мал. 56). Довести, що трикутники CKP і CME подібні. Знайти CK і CP, якщо $ME = 9$ см, $KP = 6$ см, $CM = 12$ см, $CE = 15$ см.



Мал. 56

86. Діагоналі рівнобічної трапеції перетинаються під прямим кутом. Визначити положення центра кола, описаного навколо трапеції, відносно трапеції.

Теорема косинусів

87. Знайти сторону BC трикутника ABC, якщо:
   1) $AB = 2\sqrt{3}$ см, $AC = 4$ см, $\angle A = 30^\circ$;
   2) $AB = 4$ см, $AC = 8$ см, $\angle A = 120^\circ$.

88. Знайти косинуси кутів трикутника, сторони якого дорівнюють 7 см, 9 см і 11 см.

89. Дві сторони трикутника дорівнюють 7 см і 8 см, а синус кута між ними дорівнює $\frac{4\sqrt{3}}{7}$. Знайти третю сторону трикутника. Скільки розв'язків має задача?

90. Діагоналі паралелограма дорівнюють 8 см і 10 см, а кут між ними — 30°. Знайти сторони паралелограма.

91. На сторонах AB і AC трикутника ABC взяті такі точки D і E відповідно, що $AD = 3$ см, $EC = 6$ см. Знайти довжину відрізка ED, якщо $AB = 8$ см, $BC = 12$ см, $AC = 10$ см.

92. На стороні BC правильного трикутника ABC зовні нього побудовано прямокутний трикутник BCD ($\angle C = 90°$). Знайти AD, якщо $AC = 3$ см, $DC = 6$ см.

93. Сторони трикутника, одна з яких на 8 см більша за другу, утворюють кут $120°$, а третя сторона дорівнює 28 см. Знайти периметр трикутника.

94. Одна сторона трикутника дорівнює 35 см, а дві інші відносяться як 3:8 і утворюють кут $60°$. Знайти невідомі сторони трикутника.

95. Дві сторони трикутника дорівнюють 9 см і 21 см, а кут проти більшої з них дорівнює $120°$. Знайти третю сторону трикутника.

96. У рівнобічній трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) $AB = BC = DC = 8$ см, $AD = 10$ см. Знайти довжину діагоналі AC, використовуючи теорему косинусів.

97. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює c, а кут при вершині — α. Знайти довжину медіани, проведеної до бічної сторони трикутника.

98. У чотирикутнику $ABCD$, вписаному в коло, $AB = a$, $BC = b, CD = c$, $AD = d$. Знайти довжину діагоналі AC.

99. Для сторін трикутника виконується рівність $a^2 = c^2 + b^2 - cb$. Довести, що кут, протилежний стороні a, дорівнює $60°$.

100. Дві сторони трикутника дорівнюють 16 см і 6 см, а кут між ними — $60°$. Знайти довжину медіани, проведеної до третьої сторони трикутника.

Сума квадратів діагоналей паралелограма

101. Знайти сторони паралелограма, якщо вони відносяться як 8:19, а діагоналі паралелограма дорівнюють 30 см і 50 см.

102. Діагоналі паралелограма дорівнюють 18 см і 26 см, а одна із сторін на 10 см більша за другу. Знайти сторони паралелограма.

103. Сторони трикутника дорівнюють 6 см, 12 см і 10 см. Знайти медіану трикутника, проведену до найменшої сторони.

104. Дві сторони трикутника дорівнюють 14 см і 22 см, а медіана, проведена до третьої сторони, — 12 см. Знайти третю сторону трикутника.

Варіант 3

Подібність фігур. Гомотетія

1. Накреслити в зошиті відрізок $MN = 3$ см і позначити точку O, що не належить цьому відрізку. Побудувати відрізок, гомотетичний відрізку MN з центром гомотетії в точці O і коефіцієнтом $k = 2$.
2. Накреслити в зошиті гострий кут і позначити точку M, яка лежить поза кутом. Побудувати кут, гомотетичний даному куту з центром гомотетії в точці M і коефіцієнтом $k = \frac{1}{3}$.
3. Побудувати ромб, гомотетичний даному ромбу з центром гомотетії в точці перетину його діагоналей і коефіцієнтом гомотетії $k = \frac{1}{2}$.
4. Позначити в зошиті дві точки M і N. Знайти таку точку K, щоб точка M переходила в точку N при гомотетії з центром K і коефіцієнтом $k = 3$.
5. Гомотетія з центром у початку координат переводить точку Q (1; −3) в точку P (2; −6). Знайти коефіцієнт гомотетії.
6. Дано два концентричних кола. Чи можна одне з них перетворити в інше за допомогою гомотетії? Як це зробити?
7. Чи можуть два трикутники бути подібними, але не гомотетичними?

Властивості подібних трикутників

8. Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні (мал. 81). Знайти невідомі сторони цих трикутників.

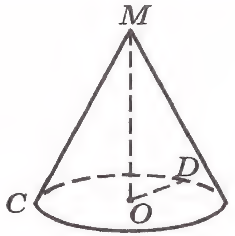
413. Прямокутник, сторони якого дорівнюють 12 см і 8 см, обертається навколо меншої сторони. Знайти площу повної поверхні і об'єм утвореного циліндра.

Конус

414. На мал. 80 зображено конус. Назвати відрізок, що є:

1) висотою конуса;
2) твірною конуса;
3) радіусом основи конуса.

415. Радіус основи конуса дорівнює 12 см, а висота конуса 5 см. Знайти площу повної поверхні і об'єм конуса.



Мал. 80

416. Прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють 24 см і 10 см, обертається навколо більшого катета. Знайти площу повної поверхні і об'єм утвореного конуса.

417. Катети прямокутного трикутника дорівнюють m і n. Він обертається спочатку навколо катета m, а потім навколо катета n. Знайти відношення площ бічних поверхонь отриманих конусів.

Куля

418. Знайти площу поверхні і об'єм кулі, радіус якої дорівнює 7 см.

419. Півкруг, діаметр якого дорівнює 6 см, обертається навколо цього діаметра. Знайти площу поверхні і об'єм утвореної кулі.

420. Радіус кулі зменшили у 4 рази. Як при цьому змінилась площа поверхні і об'єм кулі?

105. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює $8\sqrt{2}$ см, а бічна сторона — 12 см. Знайти довжину медіани трикутника, проведеної до бічної сторони.

106. Основа трикутника дорівнює 42 см, а медіани, проведені до бічних сторін, — 30 см і 60 см. Знайти третю медіану трикутника.

107. Довести, що у кожному трикутнику відношення суми квадратів сторін до суми квадратів медіан є величиною сталою. Знайти цю сталу.

Теорема синусів

108. У трикутнику ABC $AB = 4\sqrt{2}$ см, $\angle C = 45^\circ$, $\angle A = 30^\circ$. Знайти сторону BC.

109. У трикутнику ABC $CB = 6\sqrt{3}$ см, $\angle A = 120^\circ$, $\angle B = 15^\circ$. Знайти сторону AB.

110. У трикутнику ABC $AC = 9$ см, $BC = 7$ см. Чи може $\sin \angle A = \frac{4}{5}$?

111. У трикутнику ABC $AB = c$, $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$. Знайти сторони BC і AC.

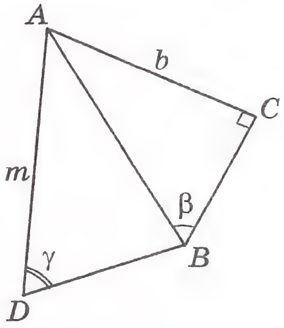
112. На мал. 57 $AC = b$, $\angle C = 90^\circ$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ADB = \gamma$, $AD = m$. Знайти синус кута ABD.

113. У рівнобедреному трикутнику кут при основі дорівнює α, а бісектриса цього кута дорівнює l. Знайти сторони трикутника.

114. Діагональ рівнобічної трапеції дорівнює d і ділить гострий кут на кути α і β (α — кут між діагоналлю і основою трапеції). Знайти сторони трапеції.

115. В рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) кут при вершині дорівнює α, а бісектриса кута при основі дорівнює l. Знайти периметр трикутника.

116. На стороні AB ромба $ABCD$ позначено точку E таку, що $\angle BCE : \angle DCE = 1 : 4$. Знайти довжини відрізків AE і CE, якщо $AB = a$, $\angle BCD = \alpha$.

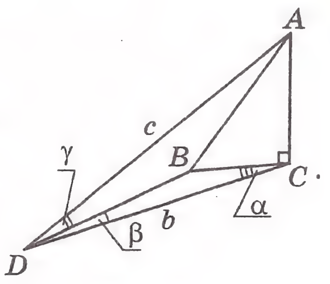


Мал. 57

117. На мал. 58 $CD = b$, $AD = c$, $\angle BCD = \alpha$, $\angle BDC = \beta$, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle ADB = \gamma$. Знайти AB.

118. Одна із сторін трикутника на 8 см більша за другу, а кути, які лежать проти цих сторін, дорівнюють 45° і 30°. Знайти ці сторони трикутника.

119. Довести, що трикутник ABC і трикутник, сторони якого дорівнюють синусам кутів трикутника ABC, подібні.



Мал. 58

120. Знайти сторони трикутника ABC, якщо медіана AM дорівнює m, $\angle BAM = \alpha$, $\angle CAM = \beta$.

Співвідношення між сторонами трикутника та протилежними сторонами

121. У трикутнику ABC $AC > AB > BC$. Порівняти кути A, B і C.

122. У трикутнику ABC $\angle A = 89^\circ$, $\angle C = 23^\circ$. Порівняти сторони AB, BC і AC.

123. У трикутнику ABC AC — найбільша сторона. Чи може кут B дорівнювати 59°?

124. Визначити вид трикутника, сторони якого дорівнюють:

1) 5 см, 6 см, 8 см;
2) 4 см, 7 см, 8 см;
3) 5 см, 12 см, 13 см.

125. У трикутнику ABC кут C більший 90°. На стороні BC взяли точку D і з'єднали її з точкою A. Довести, що $AD > AC$.

126. У трикутнику ABC AM — медіана, $\angle CAM > \angle BAM$. Довести, що $AB > AC$.

127. У трикутників DEF і MKP $DE = MK$, $DF = MP$, $\angle EDF < \angle KMP$. Довести, що $EF < KP$.

128. Висота BD трикутника ABC ділить сторону AC на відрізки AD і DC, причому $AD < CD$. Довести, що $\angle BAD > \angle BCD$.

129. У трикутнику ABC $AB = 6$ см, $BC = 2\sqrt{6}$ см, $\angle C = 60^\circ$. Знайти кут A.

130. У трикутнику ABC $AC = 9$ см, $BC = 3\sqrt{3}$ см, $\angle A = 30^\circ$. Знайти кут B. Скільки розв'язків має задача?

406. Обчислити площу повної поверхні правильної трикутної піраміди, розгортку якої зображено на мал. 77.

407. Бічні ребра DA, DB і DC трикутної піраміди $DABC$ рівні між собою, $\angle ADB = \angle BDC = \angle CDA = 60^\circ$. Знайти площу бічної поверхні піраміди, якщо $AD = 4$ см.

408. В основі піраміди лежить правильний шестикутник зі стороною 2 см. Знайти об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює 10 см.

409. Знайти об'єм правильної чотирикутної піраміди (мал. 78), основа якої — квадрат $ABCD$ зі стороною 4 см, SO — висота піраміди, $SO = 5$ см.

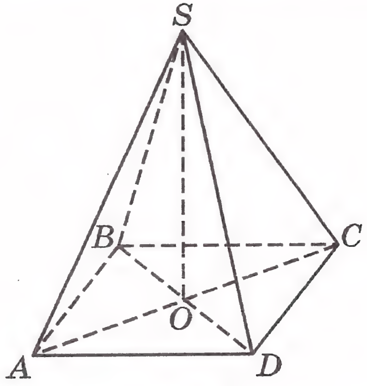
410. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник DKP, $DK = DP = 17$ см. Знайти об'єм піраміди, якщо висота DE трикутника DKP дорівнює 8 см, а висота піраміди 6 см.

Циліндр

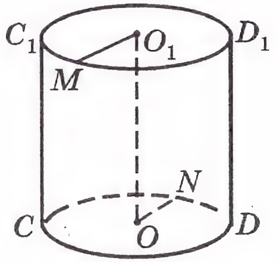
411. На мал. 79 зображено циліндр. Назвати відрізок, що є:

1) висотою циліндра;
2) твірною циліндра;
3) радіусом нижньої основи циліндра;
4) радіусом верхньої основи циліндра.

412. Радіус основи циліндра дорівнює 6 см, а його висота 5 см. Знайти площу повної поверхні і об'єм циліндра.



Мал. 78



Мал. 79

3) ребра, мимобіжні з ребром AB;

4) ребра, паралельні грані AA_1B_1;

5) ребра, перпендикулярні грані ABC;

6) грані, перпеникулярні грані BB_1C_1.

398. Знайти повну поверхню і об'єм куба з ребром 5 см.

399. Знайти площу бічної поверхні, площу повної поверхні і об'єм прямокутного паралелепіпеда (мал. 75), якщо $AB = 5$ см, $AD = 6$ см, $BB_1 = 4$ см.

400. В основі прямої призми лежить паралелограм, сторони якого 5 см і 6 см, а тупий кут $150°$. Знайти площу бічної поверхні, площу повної поверхні і об'єм призми, якщо її висота дорівнює 8 см.

401. Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює 4 см, а висота 3 см. Знайти площу бічної поверхні і об'єм призми.

402. В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник з основою 8 см і бічною стороною 5 см. Знайти площу бічної поверхні і об'єм призми, якщо її висота дорівнює 12 см.

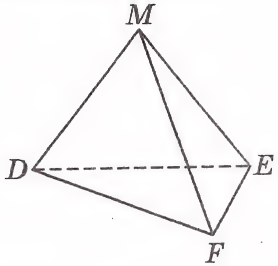
403. В основі прямої призми лежить прямокутна трапеція, основи якої 10 см і 15 см, а бічна сторона 17 см. Знайти площу повної поверхні і об'єм призми, якщо її висота дорівнює 6 см.

Піраміда

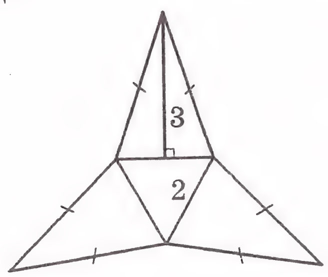
404. На мал. 76 зображено піраміду $MDEF$. Назвати:

1) основу піраміди;
2) вершину піраміди;
3) бічні ребра піраміди;
4) бічні грані піраміди.

405. Усі бічні грані правильної чотирикутної піраміди — правильні трикутники зі стороною 4 см. Знайти площу повної поверхні піраміди.



Мал. 76



Мал. 77

Властивість бісектриси трикутника

131. AK — бісектриса кута A трикутника ABC. Знайти:

1) відрізки BK і KC, якщо $AB = 8$ см, $AC = 15$ см, $BC = 8$ см;
2) сторону AB, якщо $BK : KC = 3 : 7$, $AC = 28$ см;
3) сторони AB і AC, якщо $AC - AB = 9$ см, $BK : KC = 4 : 7$;
4) сторони AB, BC і AC, якщо $AB - BK = 2$ см, $AC - CK = 3$ см, $AB + BC + AC = 25$ см.

132. Точка M лежить на стороні BC трикутника ABC. Порівняти кути BAM і CAM, якщо $AB = 9$ см, $BC = 16$ см, $BM = 5$ см, $AC = 8$ см.

133. Бісектриса гострого кута прямокутного трикутника ділить протилежний катет у відношенні $2 : \sqrt{3}$. Знайти гострі кути трикутника.

134. Бісектриса гострого кута прямокутного трикутника ділить катет на відрізки довжиною 12 см і 15 см. Знайти другий катет і гіпотенузу.

135. Бісектриса гострого кута прямокутного трикутника ділить катет у відношенні 17:15, а різниця гіпотенузи та більшого катета дорівнює 4 см. Знайти сторони трикутника.

136. Висота трикутника ділить сторону на відрізки довжиною 5 см і 9 см. Знайти довжини відрізків, на які ділить цю сторону бісектриса трикутника, якщо різниця двох інших сторін дорівнює 2 см.

137. Сторони прямокутника відносяться як 3:4, а бісектриса прямого кута ділить діагональ на відрізки, різниця яких дорівнює 5 см. Знайти сторони прямокутника.

138. Бісектриса кута прямокутника ділить діагональ на відрізки довжиною 30 см і 40 см. На які відрізки ділить ця діагональ сторону прямокутника?

139. У прямокутній трапеції більша діагональ ділить висоту, проведену з вершини тупого кута, на відрізки довжиною 15 см і 12 см, а більша бічна сторона трапеції дорівнює меншій основі. Знайти сторони трапеції.

140. У прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90°$) вписано квадрат $MKDC$ так, що точка K лежить на гіпотенузі AB. Знайти довжини відрізків AK і BK, якщо $AC = 21$ см, $BC = 28$ см.

141. Гострий кут паралелограма дорівнює 60°. Його бісектриса ділить сторону на відрізки довжиною 9 см і 15 см, рахуючи від вершини тупого кута. На які відрізки ділить ця бісектриса меншу діагональ?

142. Коло, центр якого лежить на гіпотенузі прямокутного трикутника, дотикається його катетів. Знайти катети, якщо центр кола ділить гіпотенузу на відрізки довжиною 15 см і 20 см.

143. Центр кола, вписаного у рівнобедрений трикутник, ділить висоту, проведену до основи, на відрізки, один з яких на 2 см більший за другий. Знайти сторони трикутника, якщо бічна сторона відноситься до основи як 5:8.

144. Центр кола, вписаного у рівнобедрений трикутник, ділить висоту, проведену до основи, у відношенні 9:4, а бічна сторона трикутника дорівнює 18 см. Знайти основу трикутника.

145. Центр кола, вписаного у рівнобедрений трикутник, ділить висоту, проведену до основи, у відношенні 5:4. Знайти периметр трикутника, якщо його бічна сторона менша від основи на 15 см.

146. Довжина бісектриси трикутника дорівнює 16 см. Вона утворює з протилежною стороною кут 60° і ділить її у відношенні 3:4. Знайти цю сторону.

Формула $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R$

147. У трикутнику ABC $BC = 5\sqrt{3}$ см, $\angle A = 120°$. Знайти радіус кола, описаного навколо цього трикутника.

148. За допомогою наслідку з теореми синусів знайти радіус кола, описаного навколо прямокутного трикутника з гіпотенузою c.

149. Дві сторони трикутника дорівнюють $2\sqrt{3}$ см та 8 см. Знайти третю сторону трикутника, якщо вона дорівнює радіусу описаного навколо цього трикутника кола.

150. У трикутнику ABC $\angle C = 73°$, $\angle B = 77°$, BH — висота трикутника. Знайти радіус кола, описаного навколо трикутника ABC, якщо радіус кола, описаного навколо трикутника HBC, дорівнює 4 см.

Взаємне розміщення прямих і площин у просторі

386. Скільки різних площин можна провести через одну пряму?

387. Скільки різних площин можна провести через три точки, які не лежать на одній прямій?

388. Чи можна стверджувати, що дві прямі, які паралельні третій прямій, паралельні між собою: 1) на площині; 2) у просторі?

389. Точка M не лежить у площині трикутника DEF. Чи можуть перетинатись прямі MD і EF?

390. Через точки A і B прямої l проведені до неї перпендикулярні прямі і на них відмічені такі точки C і D відповідно, що $AC = BD$. Чи вірно, що прямі AD і BC паралельні: 1) на площині; 2) у просторі?

391. Прямі a і b паралельні. Пряма c перетинає пряму a. Чи вірно, що пряма c перетинає пряму b?

392. Через точку A, яка не належить площині α, проведено пряму, паралельну площині α. Скільки існує у площині α прямих, паралельних прямій a?

393. Прямі a і b паралельні площині α. Чи можуть прямі a і b перетинатись?

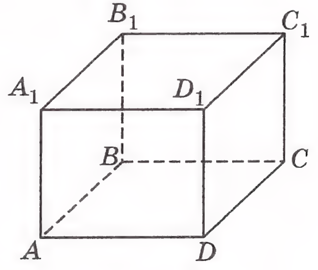
394. Площини α і β паралельні прямій a. Чи вірно, що площини α і β паралельні?

395. Пряма a перпендикулярна прямій b, яка лежить у площині α. Чи перпендикулярна пряма a площині α?

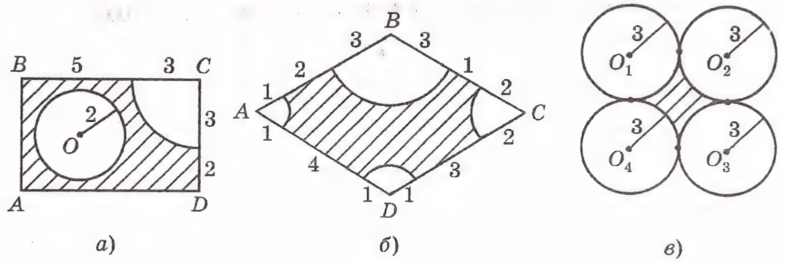
396. Площини α і β перпендикулярні. Пряма a лежить у площині α. Чи перпендикулярна пряма a площині α?

Призма

397. На мал. 75 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Вказати:
1) ребра, паралельні ребру AA_1;
2) ребра, перпендикулярні ребру BC;



Мал. 75



Мал. 74

376. Знайти площі заштрихованих фігур, зображених на мал. 74.

377. Сторони трикутника дорівнюють 26 см, 28 см і 30 см. Знайти площі описаного та вписаного в цей трикутник кругів.

378. Площа круга, вписаного у рівнобічну трапецію, дорівнює 12π см^2, а гострий кут трапеції дорівнює 60°. Знайти площу трапеції.

379. Два круга мають спільну хорду. Знайти відношення площ цих кругів, якщо з центра першого круга спільну хорду видно під кутом 90°, а з центра другого — під кутом 120°.

380. В правильний шестикутник вписано коло і навколо нього описано коло. Знайти площу кругового кільця, що міститься між цими колами, якщо сторона шестикутника дорівнює 6 см.

381. Довжини сторін трикутника дорівнюють 13 см, 20 см і 21 см. В трикутник вписано півкруг, центр якого лежить на середній стороні трикутника. Знайти площу півкруга.

382. В півкруг, діаметр якого дорівнює 16 см, вписано прямокутний трикутник, гіпотенуза якого співпадає з діаметром півкруга, а один з кутів дорівнює 30°.Визначити площу тієї частини півкруга, що лежить поза трикутником.

383. Радіус круга дорівнює 8 см. В ньому проведено хорду, довжина якої дорівнює довжині сторони вписаного квадрата. Визначити площу меншого з сегментів, що визначаються цією хордою.

384. Знайти площу круга, вписаного в сектор круга радіуса 3 см з хордою 2 см.

385. Радіус круга дорівнює 2 см. По різні сторони від центра круга проведено дві паралельні хорди, одна з яких дорівнює стороні правильного вписаного трикутника, а друга — стороні правильного вписаного шестикутника. Знайти площу тієї частини круга, яка міститься між хордами.

151. У трикутнику ABC $\angle C = \alpha$. Радіус кола, описаного навколо трикутника ABC, дорівнює R. Знайти радіус кола, описаного навколо трикутника AMB, де M — точка перетину бісектрис трикутника ABC.

152. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 12 см, а бічна сторона — 10 см. Знайти радіус кола, описаного навколо цього трикутника.

153. У рівнобічній трапеції основи дорівнюють 6 см і 24 см. Знайти радіуси кіл — описаного навколо цієї трапеції та вписаного в неї, якщо відомо, що вони існують.

154. Діагоналі рівнобічної трапеції взаємно перпендикулярні. Знайти радіус кола, описаного навколо трапеції, якщо її бічна сторона дорівнює $5\sqrt{2}$ см.

155. На стороні AB трикутника ABC взяли довільну точку D. Довести, що відношення радіусів кіл, описаних навколо трикутників ADC і BDC є величиною сталою, тобто не залежить від вибору точки D.

Розв'язування трикутників

156. Знайти невідомі сторони та кути трикутника ABC, якщо:

1) $AB = 12$ см, $\angle A = 74^\circ$, $\angle C = 39^\circ$;
2) $BC = 6$ см; $\angle B = 21^\circ$, $\angle C = 56^\circ$;
3) $AC = 7$ см, $BC = 9$ см, $\angle C = 80^\circ$;
4) $AB = 8$ см, $BC = 5$ см, $\angle B = 100^\circ$.
5) $AB = 6$ см, $BC = 9$ см, $AC = 8$ см;
6) $AB = 6$ см, $BC = 7$ см, $AC = 10$ см;
7) $BC = 5$ см, $AC = 8$ см, $\angle A = 130^\circ$;
8) $AC = 6$ см, $AB = 8$ см, $\angle C = 10^\circ$;
9) $BC = 8$ см, $AC = 7$ см, $\angle B = 10^\circ$;
10) $BC = 8$ см, $AC = 3$ см, $\angle B = 70^\circ$.

157. У трикутнику ABC $\angle A = \angle B = 50^\circ$, $AB = 8$ см. Знайти: 1) сторону AC; 2) бісектрису AD; 3) медіану CM; 4) радіус вписаного кола; 5) радіус описаного кола.

158. В рівнобічній трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) $AB = CD = m$, кут при більшій основі дорівнює α, а діагональ утворює з більшою основою кут β. Знайти: 1) діагональ

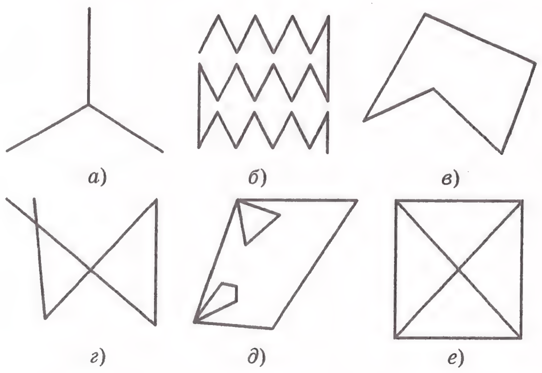
AC; 2) основи трапеції; 3) радіус кола, описаного навколо трапеції; 4) радіус кола, вписаного в трикутник AOD (O — точка перетину діагоналей трапеції).

159. Менша сторона трикутника дорівнює 4 см. В трикутник вписано коло, яке ділиться точками дотику зі сторонами на частини, градусні міри яких відносяться як 7:8:9. Знайти дві інші сторони трикутника.

160. У трикутнику ABC $BC = a$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. На сторонах трикутника зовні нього побудовані квадрати. Їх вершини послідовно з'єднали так, що отримали шестикутник. Знайти периметр шестикутника. Розв'язати задачу у загальному випадку, а також обчислити, якщо $BC = 6$ см, $\angle B = 65°$, $\angle C = 50°$.

Ламана. Опуклий многокутник

161. Які з наведених на мал. 59 фігур можна назвати ламаними? Відповідь обґрунтувати. Серед вибраних ламаних вказати прості.



Мал. 59

162. Чи можуть ланки замкненої ламаної дорівнювати: 1) 4 см, 9 см, 23 см, 11 см; 2) 14 см, 8 см, 1 см, 2 см, 2 см; 3) 8 см, 17 см, 5 см, 1 см, 3 см? Відповідь обґрунтувати.

163. Скільки діагоналей можна провести з однієї вершини опуклого дев'ятикутника? Знайти загальну кількість діагоналей опуклого дев'ятикутника.

360. Сторони трикутника дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см. Висоту, проведену до найбільшої сторони, поділено у відношенні 2:3, рахуючи від вершини, і через точку поділу проведено пряму, паралельну найбільшій стороні. Знайти площу отриманої при цьому трапеції.

Площа круга та його частин

361. Знайти площу круга, радіус якого дорівнює: 1) 4 см; 2) $\frac{2}{\pi}$ см; 3) $\frac{5}{\sqrt{\pi}}$ см.

362. Знайти з точністю до десятих радіус круга, площа якого дорівнює 9 см^2.

363. Площа одного круга у 16 разів більша за площу другого круга. Чому дорівнює відношення радіусів цих кругів?

364. Знайти площу круга, довжина кола якого дорівнює 6π см.

365. Площі двох кругів дорівнюють p см^2 і k см^2. Чому дорівнює відношення довжин кіл цих кругів?

366. Знайти площу круга, описаного навколо квадрата, площа якого дорівнює 8 см^2.

367. Знайти відношення площ вписаного і описаного кругів для правильного чотирикутника.

368. Знайти площу кільця, розміщеного між двома концентричними колами, радіуси яких дорівнюють 5 см і 8 см.

369. Знайти площу сектора круга радіуса 6 см, якщо відповідний цьому сектору центральний кут дорівнює: 1) 18°; 2) 135°; 3) 330°.

370. Яку частину площі круга становить площа сектора, якщо відповідний сектору центральний кут дорівнює: 1) 25°; 2) 165°; 3) 225°?

371. Площа сектора становить $\frac{8}{15}$ площі круга. Знайти градусну міру центрального кута, який відповідає даному сектору.

372. Знайти радіус круга, якщо площа сектора цього круга дорівнює 45 см^2, а центральний кут, що відповідає цьому сектору, дорівнює 72°.

373. Знайти площу кругового сегмента, якщо радіус круга дорівнює 8 см, а дуга містить: 1) 60°; 2) 150°; 3) 225°.

374. Знайти площу кругового сегмента, якщо його основа дорівнює 6 см, а дуга містить: 1)30°; 2) 240°.

375. За якої умови сегмент круга можна поділити на сектори?

348. Діагоналі опуклого чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці O. Площа трикутника AOB дорівнює 3 см^2, а площа трикутника BOC — 6 см^2. Знайти площу трикутника COD, якщо вона на 9 см^2 більша за площу трикутника AOD.

349. В коло вписано чотирикутник, сторони якого послідовно дорівнюють 4 см, 6 см, 8 см, 12 см. Знайти його площу.

Площі подібних фігур

350. Сторони двох квадратів відносяться як 5:7. Як відносяться їх площі?

351. Висота одного рівностороннього трикутника дорівнює стороні другого. Як відносяться їх площі?

352. Середні лінії ділять даний трикутник на чотири трикутника. Площа одного з цих трикутників дорівнює 5 см^2. Знайти площу даного трикутника.

353. Сторони двох правильних трикутників відносяться як 4:7, а площа більшого з них дорівнює 98 см^2. Знайти площу меншого трикутника.

354. Площа многокутника дорівнює 60 см^2. Знайти площу подібного йому многокутника, якщо відповідні сторони цих многокутників дорівнюють 8 см і 12 см. Скільки розв'язків має задача?

355. Пряма, паралельна основі трикутника, ділить його на дві частини рівної площі. Знайти периметр меншого трикутника, якщо периметр даного трикутника дорівнює 28 см.

356. Сторона DE трикутника DEF поділена на частини у відношенні 4:5:6, рахуючи від вершини E, і через точки поділу проведено прямі, паралельні стороні DF. Знайти відношення площ отриманих частин.

357. Медіана трикутника дорівнює 9 см. Пряма, паралельна медіані, ділить трикутник на частини, площі яких відносяться як 1:17. Знайти довжину відрізка цієї прямої, що міститься між сторонами трикутника.

358. Точка K ділить сторону BC квадрата $ABCD$ у відношенні 3:2, рахуючи від точки B. Відрізки AC і DK перетинаються в точці F. Знайти площу трикутника CFK, якщо площа трикутника ADF дорівнює 50 см^2.

359. Провести відрізок, паралельний медіані даного трикутника, так, щоб він відтинав $\frac{1}{32}$ його площі.

164. Довести, що в опуклому семикутнику сума довжин діагоналей більша за суму довжин сторін.

165. В опуклому чотирикутнику послідовно з'єднані середини сторін. Довести, що сума довжин діагоналей отриманого чотирикутника більша за півсуму діагоналей даного чотирикутника.

166. Довести, що для опуклого чотирикутника сума довжин діагоналей більша за півпериметр чотирикутника, але менша від периметра чотирикутника.

Сума внутрішніх та зовнішніх кутів опуклого многокутника

167. Чи існує шестикутник, усі сторони якого рівні і який не є правильним?

168. Чи може найбільший кут опуклого шестикутника дорівнювати 119°?

169. Як зміниться сума внутрішніх кутів опуклого многокутника, якщо кількість його сторін збільшиться на 7?

170. Визначити кути опуклого дев'ятикутника, якщо їх градусні міри відносяться як 5:6:7:8:8:9:9:9:9.

171. Знайти кути опуклого п'ятикутника, якщо один з них дорівнює 115°, другий, третій та четвертий відносяться як 7:5:3, а п'ятий дорівнює піврізниці другого та четвертого кутів.

172. Многокутник має чотири гострих кути. Довести, що він не опуклий.

173. Чи може сума двох кутів опуклого шестикутника бути більшою за суму чотирьох інших?

174. В опуклому многокутнику сума його внутрішніх кутів дорівнює 2340°. Знайти кількість його сторін та діагоналей.

175. В опуклому многокутнику 54 діагоналі. Знайти кількість його сторін та суму кутів.

176. В опуклому многокутнику сума зовнішніх кутів у 5 разів менша від суми внутрішніх. Знайти кількість сторін многокутника.

177. Знайти кількість сторін опуклого многокутника, у якого сума внутрішніх кутів на 1080° більша за суму зовнішніх.

Правильний многокутник

178. Чи існує шестикутник, усі сторони якого рівні і який не є правильним?

179. Які з правильних n-кутників мають центр симетрії?

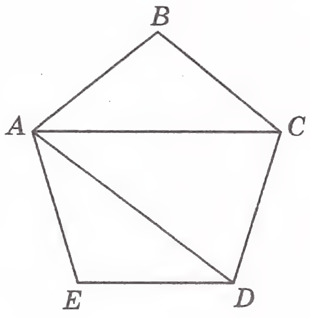
180. Знайти величини внутрішніх та зовнішніх кутів правильного n-кутника, якщо n дорівнює: 1) 8; 2) 10; 3) 15.

181. Знайти кількість сторін правильного многокутника, якщо: 1) його внутрішній кут дорівнює 172°; 2) його зовнішній кут дорівнює 24°.

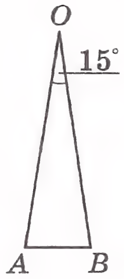
182. Визначити кількість сторін правильного многокутника, в якого зовнішній кут на 156° менший від внутрішнього.

183. Сума зовнішніх кутів правильного многокутника разом з одним із внутрішніх становить 468°. Знайти кількість сторін многокутника.

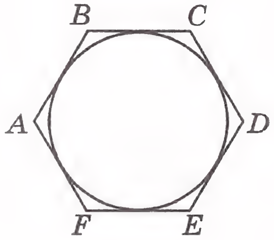
184. На мал. 60 зображено правильний п'ятикутник $ABCDE$. Знайти кут CAD.



Мал. 60



Мал. 61



Мал. 62

185. Центр правильного многокутника з'єднали з кінцями сторони AB (мал. 61). Як визначити кількість сторін многокутника?

186. Знайти величину центрального кута правильного n-кутника, якщо n дорівнює: 1) 4; 2) 12; 3) 72.

187. Центральний кут правильного многокутника дорівнює 24°. Знайти кількість сторін многокутника.

188. Який найменший внутрішній кут може мати правильний многокутник?

333. Знайти площу трапеції, менша основа якої дорівнює 4 см, висота — 8 см, а кути при меншій основі — 120° і 135°.

334. Площа трапеції дорівнює 72 см^2, а її висота — 9 см. Знайти основи трапеції, якщо одна з них у 3 рази більша за другу.

335. Знайти площу трапеції, основи якої дорівнюють 15 см і 36 см, а бічні сторони — 13 см і 20 см.

336. Радіус кола, вписаного в рівнобічну трапецію, дорівнює 8 см, а один з відрізків, на які точка дотику вписаного кола ділить бічну сторону, — 4 см. Знайти площу трапеції.

337. Площа рівнобічної трапеції дорівнює $64\sqrt{3}$ см^2, а тупий кут — 120°. Знайти бічну сторону трапеції, якщо відомо, що в неї можна вписати коло.

338. Бічні сторони трапеції дорівнюють 26 см і 30 см, а різниця основ — 28 см. Знайти площу трапеції, якщо відомо, що в неї можна вписати коло.

339. Точка дотику кола, вписаного у прямокутну трапецію, ділить більшу бічну сторону на відрізки довжиною 3 см і 12 см. Знайти площу трапеції.

340. Знайти площу рівнобічної трапеції, висота якої дорівнює 4 см, а кут між радіусами описаного кола, проведеними до кінців бічної сторони, становить 60°.

Площа многокутника

341. Діагоналі чотирикутника перпендикулярні. Довести, що його площа дорівнює півдобутку діагоналей.

342. На сторонах рівностороннього трикутника зовні нього побудовано квадрати. Вершини квадратів послідовно з'єднані. Знайти площу отриманого шестикутника, якщо сторона трикутника дорівнює 2 см.

343. Виразити площу правильного восьмикутника через довжину його меншої діагоналі.

344. Визначити площу правильного восьмикутника, вписаного в коло радіусом 6 см.

345. Знайти відношення площ правильних трикутника, чотирикутника та шестикутника, периметри яких рівні.

346. Сторона правильного восьмикутника дорівнює 2 см. Його сторони, взяті через одну, продовжені до перетину так, що утворився квадрат. Знайти площу цього квадрата.

347. Сторона квадрата дорівнює $3\sqrt{2}$ см. Навколо нього описано коло, а навколо кола — правильний шестикутник. Знайти площу шестикутника.

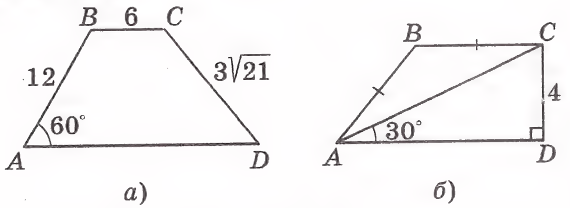
Площа трапеції

319. Знайти площу трапеції, основи якої дорівнюють 12 см і 15 см, а висота — 6 см.

320. Основи трапеції дорівнюють 9 см і 11 см, а її площа — 150 см^2. Знайти висоту трапеції.

321. Площа трапеції дорівнює 92 см^2, а її висота — 8 см. Знайти основи трапеції, якщо їх різниця дорівнює 9 см.

322. Знайти площу трапеції, основи якої — 8 см і 14 см, а діагональ довжиною $8\sqrt{3}$ см утворює з більшою основою кут 30°.



Мал. 73

323. Знайти площу трапеції $ABCD$ (мал. 73).

324. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 12 см і 18 см, а бічна сторона — 17 см. Знайти площу трапеції.

325. Знайти площу рівнобічної трапеції, менша основа якої дорівнює 10 см, бічна сторона — 6 см, а тупий кут — 120°.

326. Знайти площу рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 7 см і 25 см, а діагоналі перпендикулярні до бічних сторін.

327. Знайти площу рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 22 см і 50 см, а діагоналі є бісектрисами її тупих кутів.

328. Різниця основ прямокутної трапеції дорівнює 14 см, а більша основа — 50 см. Знайти площу трапеції, якщо більша діагональ є бісектрисою прямого кута.

329. Знайти площу прямокутної трапеції, менша основа якої дорівнює $5\sqrt{3}$ см, більша бічна сторона — 18 см, а тупий кут — 150°.

330. Різниця основ прямокутної трапеції дорівнює 9 см, а її менша діагональ — 13 см. Знайти площу трапеції, якщо її бічні сторони відносяться як 4:5.

331. Висота рівнобічної трапеції дорівнює $4\sqrt{3}$ см, а тупий кут дорівнює 120°. Знайти площу трапеції, якщо її діагональ є бісектрисою гострого кута.

332. Знайти площу рівнобічної трапеції, діагоналі якої взаємно перпендикулярні, а середня лінія дорівнює 8 см.

189. На мал. 62 зображено правильний шестикутник, в який вписано коло. Як найпростіше на цьому малюнку побудувати правильний дванадцятикутник, вписаний в коло?

190. За даною стороною a побудувати правильний дванадцятикутник.

191. Описати навколо даного кола правильний восьмикутник.

192. Довести, що сума центрального кута правильного многокутника разом з одним із внутрішніх кутів становить 180°.

193. В коло вписано многокутник, усі сторони якого рівні. Чи можуть бути нерівними його кути?

194. Довести, що вершини правильного $2n$-кутника, взяті через одну, є вершинами правильного n-кутника.

195. Довести, що якщо навколо многокутника можна описати коло і в нього можна вписати коло з тим же центром, то цей многокутник правильний.

Залежність між сторонами та радіусами вписаного та описаного кіл правильного многокутника

196. Сторона квадрата дорівнює 6 см. Знайти радіуси вписаного та описаного навколо нього кіл.

197. Радіус кола, описаного навколо квадрата, дорівнює 2 см. Знайти сторону квадрата та радіус вписаного в нього кола.

198. Радіус кола, вписаного в правильний трикутник, дорівнює $4\sqrt{3}$ см. Знайти радіус кола, описаного навколо трикутника та сторону трикутника.

199. Радіус кола, описаного навколо правильного многокутника, дорівнює 6 см, а радіус вписаного в нього кола — $3\sqrt{2}$ см. Знайти сторону многокутника та кількість його сторін.

200. Чи існує правильний многокутник, у якого відношення сторони до радіуса вписаного кола дорівнює 2?

201. У квадрат зі стороною 8 см вписано коло. Знайти сторону правильного трикутника, вписаного в це коло.

202. Знайти радіуси кіл, вписаного в правильний шестикутник та описаного навколо нього, якщо їх різниця дорівнює 4 см.

203. У коло вписано та навколо нього описано правильний трикутник. Знайти відношення сторін цих трикутників.

204. В правильний трикутник зі стороною a вписано коло, а в коло вписано квадрат. Знайти радіус кола, вписаного в квадрат.

205. Навколо правильного шестикутника зі стороною a описано коло. Навколо кола описано правильний трикутник. Знайти радіус кола, описаного навколо трикутника.

206. Радіус кола дорівнює 8 см. В коло вписано правильний трикутник і на його стороні побудовано квадрат. Знайти радіус кола, описаного навколо квадрата.

207. Середини сторін правильного восьмикутника з'єднані через одну так, що утворився квадрат. Знайти сторону квадрата, якщо сторона восьмикутника дорівнює a.

208. Знайти довжини діагоналей правильного восьмикутника за радіусом R описаного кола.

209. Центри двох кіл, що перетинаються, лежать по одну сторону від спільної хорди довжиною 6 см, яка служить для одного з цих кіл стороною правильного вписаного трикутника, а для другого — стороною вписаного правильного шестикутника. Знайти відстань між центрами кіл.

210. З однієї вершини правильного шестикутника проведені діагоналі, які поділяють його на чотири трикутники. Знайти відношення висот цих трикутників, проведених з спільної вершини.

211. Кути правильного трикутника зрізали так, що отримали правильний шестикутник. Знайти сторону шестикутника, якщо сторона трикутника дорівнює a.

212. В даний трикутник вписати квадрат так, щоб дві вершини квадрата лежали на одній стороні трикутника, а дві інші — на двох інших сторонах трикутника.

213. В даний квадрат вписати другий квадрат з даною стороною.

304. На сторонах AB і BC квадрата $ABCD$ взято точки E і F відповідно так, що $AE : EB = 9 : 2$, $BF : FC = 2 : 5$. Знайти площу трикутника BEF, якщо площа квадрата дорівнює 154 см^2.

305. Через вершину трикутника провести пряму так, щоб вона поділила його площу у відношенні: 1) 1:3; 2) 4:5.

306. Через вершину паралелограма провести пряму так, щоб вона поділила його площу у відношенні 3:5.

307. Побудувати рівнобедрений трикутник, рівновеликий даному трикутнику, так, щоб основа рівнобедреного трикутника дорівнювала одній із сторін даного.

308. Знайти площу ромба, діагоналі якого дорівнюють $5\sqrt{2}$ см і 4 см.

309. Знайти площу ромба, сторона якого дорівнює 25 см, а різниця діагоналей — 10 см.

310. Знайти площу ромба, якщо його сторона відноситься до однієї із діагоналей як 5:8, а діаметр кола, вписаного в ромб, дорівнює 24 см.

311. Перпендикуляр, проведений з вершини тупого кута ромба, ділить сторону на відрізки довжиною 7 см і 8 см, рахуючи від вершини тупого кута. Знайти площу ромба.

312. Знайти катети прямокутного трикутника, площа якого дорівнює 24 см^2, а бісектриса прямого кута утворює з гіпотенузою кут 75°.

313. В квадрат, сторона якого дорівнює 1 см, вписано другий квадрат, сторони якого утворюють зі сторонами першого квадрата кути, рівні 60°. Знайти площу другого квадрата.

314. Знайти площу трикутника, сторони якого дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см.

315. Бісектриса кута трикутника ділить протилежну сторону трикутника на відрізки, один з яких на 3 см більший за другий. Дві інші сторони трикутника дорівнюють 14 см і 21 см. Знайти площу трикутника.

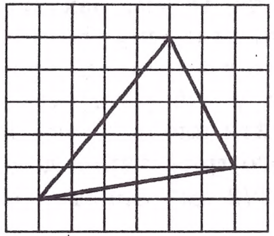
316. Знайти найбільшу висоту трикутника, сторони якого дорівнюють 9 см, 10 см і 11 см.

317. Три кола, радіуси яких дорівнюють 9 см, 11 см і 12 см, попарно дотикаються одне одного. Визначити площу трикутника, вершини якого лежать у центрах цих кіл.

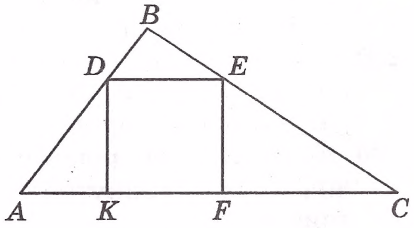
318. В трикутник ABC вписано коло з центром O. Знайти сторони трикутника ABC, якщо площі трикутників AOB, BOC, AOC відповідно дорівнюють 90 см^2, 246 см^2 і 168 см^2.

298. Знайти площу трикутника, зображеного на мал. 69.

299. В трикутник ABC, основа AC якого дорівнює 6 см, а висота, проведена до неї, — 3 см, вписано квадрат $KDEF$ (мал. 70). Знайти площу квадрата.



Мал. 69



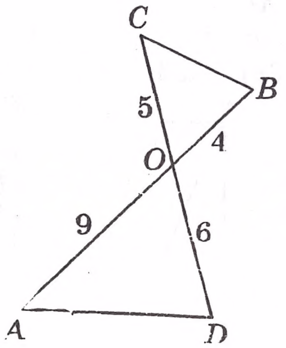
Мал. 70

300. Площа трикутника ABC дорівнює 98 см^2. Точка K ділить медіану BM у відношенні 4:3, рахуючи від точки B. Знайти площі трикутників ABK, BKC, CKM і AKM.

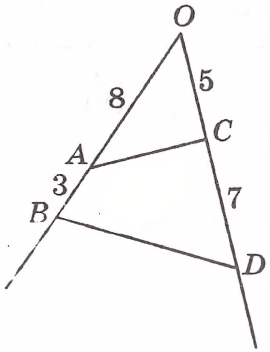
301. Бісектриса кута A трикутника ABC ділить площу трикутника у відношенні 4:7. Знайти відношення сторін AB і AC трикутника.

302. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O (мал. 71), $AO = 9$ см, $OB = 4$ см, $CO = 5$ см, $OD = 6$ см. Знайти відношення площ трикутників AOD і COB.

303. На сторонах OB і OD кута O відкладено відрізки $OA = 8$ см, $AB = 3$ см, $OC = 5$ см, $CD = 7$ см (мал. 72). Знайти відношення площ трикутника OBD і чотирикутника $ABDC$.



Мал. 71



Мал. 72

214. Навколо правильного шестикутника зі стороною a описано коло. Довести, що сума квадратів відстаней від довільної точки кола до вершин шестикутника є величиною сталою. Знайти її.

Довжина кола та його частин

215. Знайти довжину кола, радіус якого дорівнює: 1) 3 см; 2) 0,5 см; 3) 2π см; 4) $\frac{1}{\pi}$ см.

216. Знайти довжину кола, радіус якого на π см менший від діаметра.

217. Чому дорівнює радіус кола, довжина якого дорівнює: 1) 1 см; 2) 8 см; 3) 3π см; 4) $9\pi^2$ см?

218. Як побудувати коло, довжина якого дорівнює різниці довжин двох даних кіл?

219. Радіус кола зменшили: 1) у 4 рази; 2) на 4 см. Як при цьому змінилась довжина кола?

220. У колі по різні боки від центру проведено дві паралельні хорди довжиною 12 см і 16 см. Відстань між хордами дорівнює 14 см. Знайти довжину кола.

221. На котушку радіусом 1,5 см намотано 40 см мотузки. Скільки зроблено повних витків?

222. Знайти швидкість велосипедиста, який проїжджає круговий маршрут діаметром 100 метрів 45 разів за годину. Результат округлити до цілих.

223. Побудувати графік залежності радіуса кола від його довжини.

224. Радіус кола дорівнює 4 см. Знайти довжину дуги кола, що містить: 1) 1°; 2) 45°; 3) 135°; 4) 180°; 5) 345°.

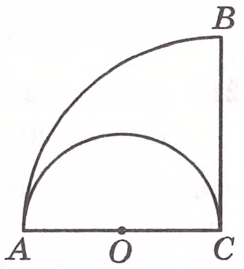
225. Довжина дуги кола дорівнює 8π см, а її градусна міра — 24°. Знайти радіус кола.

226. Довжина дуги кола радіусом 20 см дорівнює 5π см. Знайти градусну міру дуги.

227. Накреслити в зошиті коло радіусом 8 см. Відкласти на ньому дугу довжиною 2π см.

228. Дуга кола радіусом 6 см містить 240°. Знайти радіус кола, довжина якого дорівнює довжині цієї дуги.

229. CA і CB — два рівних перпендикулярних відрізка довжиною m. Проведено дугу AB кола з центром C, а на відрізку AC як на діаметрі побудовано півколо (мал. 63). Знайти периметр фігури, обмеженої дугою AB, відрізком BC та дугою AC.



Мал. 63

230. Катети AB і BC рівнобедреного прямокутного трикутника ABC дорівнюють 8 см. Коло з центром в точці B дотикається гіпотенузи трикутника. Знайти довжину дуги кола, яка міститься всередині трикутника.

231. На висоті BD рівностороннього трикутника ABC, $AB = 6$ см, як на діаметрі побудовано коло. Знайти довжину дуги кола, що міститься всередині трикутника.

232. В коло радіусом $R = 1$ вписано квадрат, а навколо кола описано правильний шестикутник. Зробити малюнок і, користуючись ним, довести, що $2\sqrt{2} < \pi < 2\sqrt{3}$.

Радіанна міра кута

233. Знайти радіанну міру кутів: 12°; 45°; 72°; 105°; 135°; 330°.

234. Знайти градусну міру кута, радіанна міра якого дорівнює: $\frac{\pi}{30}$; $\frac{\pi}{8}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{5}{6}\pi$; $1\frac{3}{4}\pi$; 5π.

235. Радіус кола дорівнює 2 см. Знайти довжину дуги кола, що відповідає куту у 5 радіанів.

236. Чи існує опуклий многокутник, усі кути якого дорівнюють цілому числу радіан?

Площа квадрата. Площа прямокутника

237. Знайти площу квадрата, сторона якого дорівнює: 1) 16 см; 2) 5,5 см; 3) $\sqrt{a}$ см.

238. Знайти площу квадрата, діагональ якого дорівнює: 1) 6 см; 2) $8\sqrt{2}$ см; 3) $a\sqrt{2}$ см.

287. Довести, що діагоналі паралелограма ділять його на чотири рівновеликих трикутники.

288. Перпендикуляр, проведений з середини основи рівнобедреного трикутника до бічної сторони, ділить її на відрізки довжиною 8 см та 18 см, рахуючи від вершини кута при основі. Знайти площу трикутника.

289. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 50 см, а основа трикутника у 1,5 рази більша за висоту, проведену до неї. Знайти площу трикутника.

290. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 30°, а площа трикутника — $72\sqrt{3}$ см^2. Знайти сторони трикутника.

291. Катети прямокутного трикутника відносяться як 3:4, а гіпотенуза дорівнює 35 см. Знайти площу трикутника.

292. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 16 см, а другий менший від гіпотенузи на 4 см. Знайти площу трикутника.

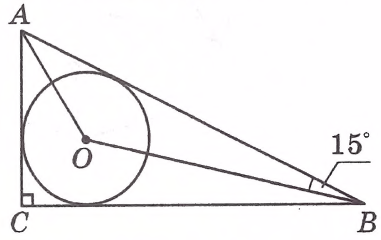
293. Різниця відрізків, на які висота прямокутного трикутника ділить гіпотенузу, дорівнює 10 см. Знайти площу трикутника, якщо висота дорівнює 12 см.

294. Знайти площу прямокутного трикутника, якщо бісектриса гострого кута ділить протилежний катет на відрізки довжиною 24 см і 51 см.

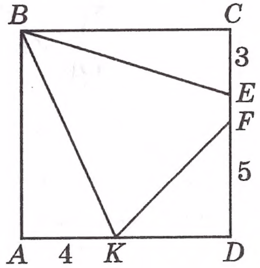
295. Точка дотику кола, вписаного у прямокутний трикутник, ділить гіпотенузу на відрізки довжиною 10 см і 24 см. Знайти площу трикутника.

296. В прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90°$) вписано коло з центром O (мал. 67). Знайти площу трикутника ABC, якщо $OA = 8$ см, $\angle ABO = 15°$.

297. Сторона квадрата $ABCD$ дорівнює 9 см, $AK = 4$ см, $CE = 3$ см, $FD = 5$ см (мал. 68). Знайти площу чотирикутника $BEFK$.

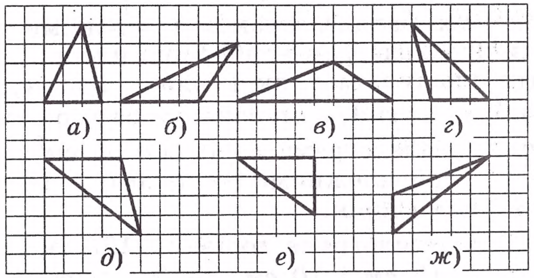


Мал. 67



Мал. 68

277. На мал. 66 вказати трикутники, які мають рівні площі.



Мал. 66

278. Знайти площу трикутника, дві сторони якого 9 см і $3\sqrt{2}$ см, а кут між ними дорівнює: 1) 45°; 2) 150°.

279. Дві сторони трикутника дорівнюють 7 см і 6 см. Чи може його площа дорівнювати: 1) 23 $см^2$; 2) 21 $см^2$; 3) 17 $см^2$?

280. Основа першого трикутника 6 см, а основа другого — 9 см. Яким повинно бути відношення висот першого та другого трикутників, щоб площа другого трикутника була у 2 рази більша за площу першого?

281. Знайти площу рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого дорівнює 17 см, а висота, проведена до основи, — 5 см.

282. Катет прямокутного трикутника дорівнює 10 см, а гіпотенуза — 26 см. Знайти висоту трикутника, проведену до гіпотенузи.

283. Як зміниться площа трикутника, якщо:
1) його основу збільшити у 8 разів;
2) його висоту зменшити у 5 разів;
3) основу збільшити у 12 разів, а висоту зменшити у 4 рази;
4) основу зменшити у 9 разів, а висоту — у 7 разів?

284. У трикутнику ABC відношення висот, проведених з вершин A і B, дорівнює $\frac{7}{9}$. Знайти відношення сторін BC і AC.

285. Довести, що сторони трикутника обернено пропорційні відповідним висотам.

286. Точка K — середина медіани CM трикутника ABC. Довести, що трикутники ACK, BCK, AKM і BKM мають рівні площі.

239. Знайти площу прямокутника, сторони якого дорівнюють: 1) 9 см і 16 см; 2) 0,6 см і 4,9 см.

240. Знайти сторону квадрата, якщо його площа дорівнює: 1) 256 $дм^2$; 2) 6,76 $см^2$; 3) 20 $м^2$; 4) $8a$ $см^2$.

241. Одна із сторін прямокутника дорівнює $8\sqrt{2}$ см, а його площа — 48 $см^2$. Знайти другу сторону прямокутника.

242. Діагональ прямокутника дорівнює $12\sqrt{3}$ см і утворює зі стороною кут 60°. Знайти площу прямокутника.

243. Площа прямокутника дорівнює 144 $см^2$. Знайти його сторони, якщо одна з них у 8 разів більша за другу.

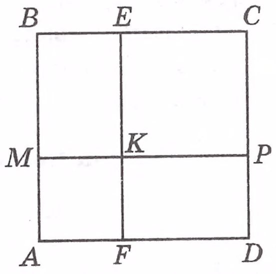
244. Площа прямокутника дорівнює 48 $см^2$. Знайти його сторони, якщо їх півсума дорівнює 7 см.

245. Площа квадрата у 2 рази більша за площу прямокутника. Сторона квадрата дорівнює 6 см, а одна із сторін прямокутника — 9 см. Знайти другу сторону прямокутника.

246. Знайти площу квадрата, якщо радіус кола, вписаного в нього, дорівнює r.

247. Площа квадрата чисельно у 2 рази більша за його периметр. Знайти сторону квадрата.

248. $ABCD$ — квадрат (мал. 64). Відрізки MP і EF паралельні його сторонам, $AB = a$, $CP = CE = b$. Користуючись малюнком, довести формулу $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.



Мал. 64

249. Чи можуть квадрати, які мають рівні площі, бути нерівними?

250. Як зміниться площа квадрата, якщо його сторону:
1) зменшити у 9 разів;
2) збільшити у $\sqrt{3}$ разів;
3) збільшити у n разів?

251. Як зміниться площа квадрата, якщо його діагональ зменшити у 9 разів? Як при цьому зміниться периметр квадрата?

252. Як зміниться площа прямокутника, якщо:
1) одну з його сторін збільшити у 8 разів;
2) одну з його сторін зменшити у 3 рази;
3) обидві сторони зменшити у $\sqrt{5}$ разів;

4) одну сторону зменшити у 11 разів, а другу — у 10 разів;
5) одну сторону збільшити у $\sqrt{8}$ разів, а другу зменшити у $\sqrt{2}$ разів;
6) одну сторону зменшити у m разів, а другу — у n разів;
7) одну сторону збільшити у a разів, а другу зменшити у b разів?

253. Відношення периметрів двох квадратів дорівнює 8. Знайти відношення їх площ.

254. Побудувати квадрат, площа якого дорівнює різниці площ двох даних квадратів.

255. Побудувати квадрат, площа якого у 5 разів менша від площі даного квадрата.

256. Побудувати квадрат, площа якого у два рази більша за площу даного прямокутника.

257. Як розрізати двома лініями квадрат, щоб з отриманих частин можна було скласти два рівні квадрати?

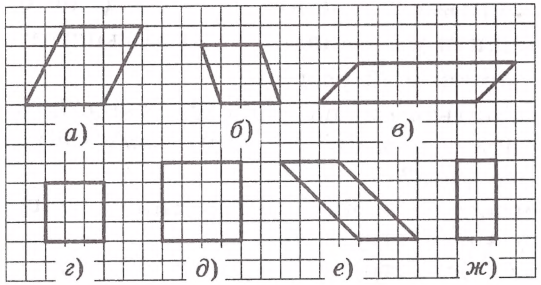
258. Сторона квадрата, вписаного в коло, дорівнює $4\sqrt{2}$ см. Знайти площу квадрата, описаного навколо цього кола.

Площа паралелограма. Площа ромба

259. Знайти площу паралелограма, сторона якого дорівнює 16 см, а висота, проведена до неї, — 9 см.

260. На мал. 65 вказати паралелограми, які мають рівні площі.

261. Знайти площу паралелограма, сторони якого дорівнюють 8 см і 14 см, а кут між ними — 150°.



Мал. 65

262. Знайти площу ромба, сторона якого дорівнює $9\sqrt{2}$ см, а один з кутів — 45°.

263. Серед усіх паралелограмів з заданими сторонами вказати паралелограм найбільшої площі.

264. Знайти площу ромба, якщо один з його кутів на 120° більший за другий, а сторона ромба дорівнює $6\sqrt{3}$ см.

265. Площа паралелограма дорівнює 56 см^2, а відстань між двома протилежними сторонами — 14 см. Знайти довжини цих сторін.

266. Площа паралелограма дорівнює 120 см^2, а дві його сторони — 15 см і 10 см. Знайти висоти паралелограма.

267. Кут між сторонами паралелограма дорівнює 60°, одна із сторін — 8 см, а площа паралелограма — 56 см^2. Знайти другу сторону паралелограма.

268. Площа паралелограма дорівнює 112 см^2, а його висота у 7 разів менша від сторони, до якої вона проведена. Знайти ці сторону та висоту паралелограма.

269. Сторона квадрата дорівнює стороні ромба, а гострий кут ромба дорівнює 45°. Знайти відношення площі квадрата до площі ромба.

270. Чи існує паралелограм, сторони якого дорівнюють 4 см і 6 см, а відповідні висоти — 5 см і 3 см?

271. Сторони паралелограма дорівнюють 24 см і 30 см, а кут між висотами — 30°. Знайти площу паралелограма.

272. Знайти площу паралелограма, діагоналі якого дорівнюють 16 см і 20 см, і одна з діагоналей перпендикулярна до сторони.

273. Довести, що у паралелограма з двох висот більша та, яка проведена до меншої сторони.

Площа трикутника

274. Сторона трикутника дорівнює 12 см, а висота, проведена до неї, — 2,5 см. Знайти площу трикутника.

275. Площа трикутника дорівнює 98 см^2. Знайти сторону трикутника, якщо висота, проведена до неї, дорівнює 14 см.

276. Знайти площу прямокутного трикутника, катет якого дорівнює 8 см, а гіпотенуза — 17 см.